.

Mamouni My Ismail

Devoir libre 4
Crochet de Lie

MP-CPGE Rabat

8 octobre 2010

Blague du jour

Êtes-vous accro l'Internet ? La réponse serait oui si :
- A trois heures du matin, vous vous levez pour un besoin pressant et regardez en revenant si vous avez reçu des mails.
- Vous inclinez la tête gauche quand vous souriez
- Sur la porte de la cuisine est écrit : "upload"
- Sur la porte des toilettes est écrit : "download"

Sophus Lie (1842-1899)

Mathématicien norvégien. Il a participé activement à la création de la théorie des symétries continues, et l'a appliquée à la géométrie et aux équations différentielles. On lui doit la création de l'algèbre de Lie, ainsi que des groupes de Lie. Arrêté et incarcéré en France lors de la guerre, soupçonné d'être un espion allemand, il en profite pour avancer sa thèse sur ≪ une classe de transformation géométrique. Il était marié à la petite fille de Niels Henrik Abel.

Mathématicien du jour

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, E, on pose pour tous endomorphismes u et v :

$$[u,v] = u\circ v - v\circ u \qquad \textbf{Crochet de Lie.}$$

1) **Montrer que $(\mathcal{L}(E),+,.,[,])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.**
2) **Montrer que l'application : $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (u,v) & \longmapsto & [u,v] \end{array}$ est bilinéaire symétrique.**
3) **Montrer que $\forall u,v,w\in\mathcal{L}(E)$, on a :**

$$[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]] = 0. \qquad \textbf{identité de Jacobi.}$$

4) **Soient u,v deux endomorphisme de E tels que $[u,v]=\mathrm{id}_E$. Montrer que :**
   a) **$[u^k,v]=ku^{k-1}$ pour $k\in\mathbb{N}$.**
   b) **$[P(u),v]=P'(u)$ pour $P\in\mathbb{K}[X]$.**
   c) **u et v n'ont pas de polynômes minimaux.**
5) ***Oral CCP 99.***
   On suppose dans cette question que E un espace vectoriel réel de dimension finie et que $f,g\in\mathcal{L}(E)$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$ tels que $[f,g]=\alpha f$.
   a) **Montrer pour tout entier naturel n : $[f^n,g]=\alpha n f^n$.**
   b) **Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $f^n=0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ h & \longmapsto & [h,g] \end{array}$.**

7) ***Oral X 2001***

On suppose dans cette question que E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et que f un endomorphisme de E tel que χ_f soit irréductible. On se propose de montrer que pour tout endomorphisme g, le crochet de Lie rg$[f,g] \neq 1$. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que rg$[f,g] = 1$.

a) **Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :**

$$\forall\ x \in E, \quad \text{on a :} f(g(x)) - g(f(x)) = \varphi(x)a.$$

b) **En déduire par récurrence sur k que :**

$$\forall\ x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \varphi(x)f^{k-1}(a) + \varphi(f(x))f^{k-2}(a) + \cdots + \varphi(f^{k-1}(x))a.$$

c) **En déduire que : $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et que $\exists P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $f^n(a) = P(f)$.**

d) **En déduire que $\mu_f(X) = X^n - P(X)$.**

e) **En déduire que $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in E$.**

f) **En déduire une contradiction.**

8) ***Oral Ens Cachan 2003.***

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un automorphisme d'espace vectoriel tel que :

$$\forall\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi([A,B]) = [\Phi(A), \Phi(B)]$$

On se propose de montrer : $\forall\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, D est diagonalisable *ssi* $\Phi(D)$ est diagonalisable. Pour cela considérons l'application : $\phi_D : X \longrightarrow [D, X]$ et montrons que (D est diagonalisable) $\Longleftrightarrow$ (ϕ_D est diagonalisable).

a) **On suppose que D est diagonalisable. Montrer alors que les applications $X \longrightarrow DX$ et $X \longrightarrow XD$ le sont aussi (annulateur scindé à racines simples) et elles commutent, donc elles sont simmultanément diagonalisables et leur différence, ϕ_D, est aussi diagonalisable.**

b) **Réciproquement, on suppose que ϕ_D est diagonalisable.**

   i. **Montrer que si P est un polynôme quelconque de degré m, alors :**

$$\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(\phi_D)(X) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$

   ii. **Prenons P annulateur scindé à racines simples de ϕ_D, $X = U^tV$ où U est un vecteur propre de D associé à une certaine valeur propre λ et V un vecteur arbitraire. Montrer que $U^tVP(D - \lambda I$, puis que ${}^tVP(D - \lambda I) = 0$.**

   iii. **En déduire que $P(D - \lambda I) = 0$, puis conclure.**

9) **Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(()\mathbb{R})$ telles que $[A,B] = A$, montrer que A est nilpotente. Pour cela on considère l'application :**

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{M}_n(()\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(()\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

a) **Montrer que ψ est linéaire de E dans E.**

b) **Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \psi(A^k) = kA^k$.**

c) **On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.**

d) **Conclure.**

10) CNC 2000, Math II, MP