DL 1 Décomposition Spectrale et racine carrée d'un endomorphisme

Blague du jour

Êtes-vous accro l'Internet ? La réponse serait oui si :

- A trois heures du matin, vous vous levez pour un besoin pressant et regardez en revenant si vous avez reçu des mails.
- Vous inclinez la tête gauche quand vous souriez
- Sur la porte de la cuisine est écrit : "upload"
- Sur la porte des toilettes est écrit : "download"

Sophus Lie (1842-1899)

Mathématicien norvégien. Il a participé activement à la création de la théorie des symétries continues, et l'a appliquée à la géométrie et aux équations différentielles. On lui doit la création de l'algèbre de Lie, ainsi que des groupes de Lie. Soupçonné d'être un espion allemand, il profite de son incarcération pour avancer sa thèse sur « une classe de transformation géométrique. Il était marié à la petite fille de Niels Henrik Abel.

Mathématicien du jour

Énoncé (extrait CCP PC 2010)

Notations et objectifs.

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension fine n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombre réels.
$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.
On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.
Pour tout endomorphisme f, $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f.

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\operatorname{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) | h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \text{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{k fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors

$\prod_{1\leq i\leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.
Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

Partie I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① Montrer que f est diagonalisable.

② Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

③ Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

④ Calculer P^{-1}, puis déterminer la base de f^m dans la base canonique.

⑤ Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).

⑥ Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

⑦ Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

① Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.

② En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

③ Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

④ Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geq 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

⑤ Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

⑥ Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Ecrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

⑦ Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

⑧ En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

⑨ Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie II

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \mathrm{id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

① Calculer $(f - \lambda \mathrm{id}) \circ (f - \mu \mathrm{id})$. En déduire que f est diagonalisable.

② Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

③ Déduire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

④ On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.
Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.

⑤ Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:
$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q.$$

⑥ Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.

⑦ On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.

⑧ Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

⑨ Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.

⑩ En déduire que si $\dim(E) \geq 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Partie III

Soient $p_1, \ldots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i.$$

① Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i.$$

② En déduire que $\prod_{i=1}^{m} (f - \lambda_i \mathrm{id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.

③ Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq m$, on considère le polynôme :
$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}.$$
Montrer que pour tout entier ℓ, tel que $1 \leq \ell \leq m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$.
En déduire que $\mathrm{Im}\,(p_\ell) \subset \ker(f - \lambda_\ell \mathrm{id})$, puis que le spectre de f est :
$$\mathrm{Sp}\,(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}.$$

④ Vérifier que pour tout couple d'entiers (i,j) tels que $1 \leq i,j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

⑤ Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^{m} \ker(f - \lambda_i \mathrm{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i.

⑥ Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \ldots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F.

⑦ Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

⑧ Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.

a Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f.

b Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h.

c En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.

⑨ Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Partie IV

A) Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

① Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.

② Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, alors $2p - 1 \leq n$.

③ Déterminer les réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

④ Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

⑤ Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \mathrm{id}) \neq \emptyset$.
Plus généralement, montrer que pour tout réel α réel, $\mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{id}) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta \mathrm{id}) \neq \emptyset$.

B)

① Soit $T = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ.
Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.

② On suppose dans toute la suite que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ. Déduire de la question précédente que $E = \ker(f - \lambda \mathrm{id})^n$.

③ Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.