

☒ Corrigé (Pr. Blache, CPGE France)

Partie I

A)

- ① Calculons le polynôme caractéristique de  $A$  (donc aussi de  $f$ ) :

$$P_f(X) = P_A(X) = \begin{vmatrix} 8-X & 4 & -7 \\ -8 & -4-X & 8 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(X-1)(X-4).$$

Ainsi,  $P_f$  est scindé à racines simples, donc  $f$  est diagonalisable

- ② L'étude des sous-espaces propres donne :

$$\begin{aligned} E_0(f) &= \text{Vect}(v_1) \text{ avec } v_1 = (1, -2, 0), \\ E_1(f) &= \text{Vect}(v_2) \text{ avec } v_2 = (1, 0, 1), \\ E_4(f) &= \text{Vect}(v_3) \text{ avec } v_3 = (1, -1, 0). \end{aligned}$$

Dans ce cas, la matrice  $D$  est donnée par :  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

- ③ La formule de changement de base donne :  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ , et donc  $A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$ .

- ④ En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

Après calculs, on trouve que la matrice de  $f^m$  dans la base

canonique est :

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^m & 4^m & 1 - 2 \cdot 4^m \\ -2 \cdot 4^m & -4^m & 2 \cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on vérifie que cela redonne  $A$  pour  $m = 1$ .

- ⑤ Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  une matrice qui commute avec  $D$ . On écrit que  $MD = DM$ , ce qui donne  $m_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . Donc nécessairement,  $M$  est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec  $D$  qui est elle-même diagonale.

Finalement, les matrices qui commutent avec  $D$  sont les matrices dia

- ⑥ On a  $HD = DH = H^3$ , donc  $H$  et  $D$  commutent.
- ⑦ D'après les questions 5) et 6), si  $H^2 = D$ , alors  $H$  est une matrice diagonale. La condition  $H^2 = D$  donne également :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \text{ (ce qui fournit 4 solutions).}$$

Pour obtenir les matrices solutions dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices solutions sont données par  $P \cdot H \cdot P^{-1}$ , où  $H$  est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

$$\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

B)

- ① On trouve pour tout entier  $m \geq 1$  :  $J^m = 3^{m-1}J$ .

② Travaillons avec les matrices  $A$  et  $J$ . On a  $A = J + I_3$ . Comme  $J$  et  $I_3$  commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, A^m = (I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left( \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot 3^{k-1} \right) J = I_3 + \frac{4^m - 1}{3} J$$

Si on revient aux endomorphismes, cela donne :

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*, f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j.$$

Evidemment, cette relation est encore valable pour  $m = 0$  (car dans ce cas, on a  $\text{id} = \text{id}$ ).

③ Un calcul du polynôme caractéristique de  $A$  donne :  
 $P_f(X) = P_A(X) = -(X - 1)^2(X - 4)$ . Donc  
 $f$  admet les deux valeurs propres  $\lambda = 1$  et  $\mu = 4$ .

④ D'après la question 2), on peut écrire  $f^m = 1^m(\text{id} - \frac{1}{3}j) + 4^m(\frac{1}{3}j)$  pour tout entier  $m \geq 0$ . En posant  $p = \text{id} - \frac{1}{3}j$  et  $q = \frac{1}{3}j$ , on obtient l'existence de la décomposition voulue.  
 De plus, on a nécessairement  $\text{id} = p + q$  (pour  $m = 0$ ) et  $f = p + 4q$  (pour  $m = 1$ ). Donc  $p = \frac{1}{3}(4\text{id} - f)$  et  $q = \frac{1}{3}(f - \text{id})$ , d'où l'unicité de cette décomposition.

Enfin, comme  $\text{id}$  et  $j$  sont deux endomorphismes linéairement indépendants (d'après leur écriture matricielle), il en est de même pour  $p$  et  $q$ .

⑤ On obtient, en utilisant les expressions de  $p$  et  $q$  trouvées à la question précédente :

$$p^2 = p, q^2 = q, p \circ q = q \circ p = 0.$$

Soit maintenant  $h = \alpha \cdot p + \beta \cdot q$  tel que  $h^2 = f$ . D'après les relations précédentes, on a

$$h^2 = \alpha^2 \cdot p + \beta^2 \cdot q = f = p + 4q.$$

Comme  $(p, q)$  est une famille libre, cette égalité équivaut à  $\alpha^2 = 1$  et  $\beta^2 = 4$ .

Donc il y a 4 endomorphismes  $h$  solutions, donnés par :

$$h = \pm p \pm 2q.$$

⑥ On détermine les sous-espaces propres de  $f$  :

$$E_1(f) = \text{Vect}(w_1, w_2) \text{ avec } w_1 = (1, -1, 0) \text{ et } w_2 = (0, 1, -1),$$

$$E_4(f) = \text{Vect}(w_3) \text{ avec } w_3 = (1, 1, 1).$$

$$\text{Comme } \dim(E_1(f)) + \dim(E_4(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

$f$  est diagonalisable.

Et  $(w_1, w_2, w_3)$  est une base de vecteurs propres pour  $f$ .

Notons  $\mathcal{B}_d = (w_1, w_2, w_3)$ . Alors :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

⑦ On peut prendre par exemple :  $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $Y =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

⑧ Soit  $h$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}_d$  est  $Y$ . Alors  $h^2 = f$  car  $Y^2 = D$ . Et  $h$  n'est pas combinaison linéaire de  $p$  et  $q$ , car  $Y$  n'est pas combinaison linéaire de leurs matrices (vues précédemment) dans la base  $\mathcal{B}_d$ .

- ③ Soit  $h$  tel que  $h^2 = f$ . Comme  $f$  est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 1 et 4, le polynôme  $Q_1(X) = (X - 1)(X - 4)$  est un polynôme annulateur de  $f$ , donc de  $h^2$ .  
Donc le polynôme  $Q_2(X) = (X^2 - 1)(X^2 - 4) = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2)$  est un polynôme annulateur de  $h$ . Or ce polynôme est scindé à racines simples, donc d'après le cours,  $h$  est diagonalisable.

### Partie II

- ① On a, en utilisant les trois relations,  $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = f^2 - (\lambda + \mu)f + (\lambda\mu) \text{id} = 0$ . Donc  $(X - \lambda)(X - \mu)$  est un polynôme annulateur de  $f$ , scindé à racines simples. Et  $f$  est diagonalisable.
- ② A la question précédente, on a trouvé un polynôme annulateur de  $f$  qui n'a que  $\lambda$  et  $\mu$  comme racines. Il en résulte que  $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda; \mu\}$ .  
Si  $\mu$  n'est pas valeur propre de  $f$ , la seule valeur propre est donc  $\lambda$ . Comme  $f$  est diagonalisable, on a donc  $f = \lambda \text{id}$ . En utilisant les deux premières relations de l'énoncé, on a donc :  
$$\lambda \text{id} = \lambda p + \mu q = \lambda p + \lambda q.$$
  
D'où  $(\lambda - \mu)q = 0$ , et comme  $\lambda \neq \mu$ ,  $q = 0$ . Ceci est contraire aux hypothèses; ainsi  $\mu$  est valeur propre de  $f$ .  
On montrerait de même que  $\lambda$  est aussi une valeur propre de  $f$ . Donc  $\text{Sp}(f) = \{\lambda; \mu\}$ .
- ③ D'après la question 1), on a :  $0 = (f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p$ . Comme  $\lambda \neq \mu$ , on en déduit que  $q \circ p = 0$ .  
De même, comme  $(f - \mu \text{id}) \circ (f - \lambda \text{id}) = 0$ , on trouve  $p \circ q = 0$ .

Enfin, comme  $\text{id} = p + q$ , on obtient, en composant par  $p$  (resp. par  $q$ ) :  $p = p^2$  (resp.  $q = q^2$ ).

- ④ Comme  $\lambda\mu \neq 0$ ,  $f$  n'admet pas la valeur propre 0. Donc  $\ker f = \{0\}$ , et comme  $E$  est de dimension finie,  $f$  est bijective.

De plus, on a vu en 1) que  $f^2 - (\lambda + \mu)f + (\lambda\mu) \text{id} = 0$ . D'où  $f^{-1} = \frac{-1}{\lambda\mu}(f - (\lambda + \mu)\text{id})$ . On remplace  $f$  et  $\text{id}$  à l'aide de  $p$

et  $q$ , ce qui donne finalement :  $f^{-1} = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q$ .

- ⑤ La relation  $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$  est vérifiée pour  $m = 0, 1, 2$  d'après l'énoncé, et pour  $m = -1$  d'après la question précédente.

Une démonstration par récurrence sans difficulté, d'une part pour  $m \in \mathbb{N}$ , d'autre part pour  $-m \in \mathbb{N}$ , donne (en utilisant le fait que  $p \circ q = q \circ p = 0$ ) :  $\forall m \in \mathbb{Z}, f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ .

- ⑥ Soient deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\alpha p + \beta q = 0$ . En composant par  $p$ , on a  $\alpha p = 0$  donc  $\alpha = 0$  puisque  $p \neq 0$ . De même, en composant par  $q$ , on obtient  $\beta = 0$ .

Donc  $(p, q)$  est une famille libre et  $\dim(F) = 2$ .

- ⑦ Soit  $h \in \mathcal{R}(f) \cap F$ . Alors  $h = \alpha p + \beta q$  et comme  $p \circ q = q \circ p = 0$ ,  $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = \lambda p + \mu q$ . Comme  $(p, q)$  est une famille libre, on a  $\alpha^2 = \lambda$  et  $\beta^2 = \mu$ , i.e. (puisque  $\lambda$  et  $\mu$  sont supposés positifs)  $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$  et  $\beta = \pm\sqrt{\mu}$ . On obtient 4 possibilités, qui réciproquement conviennent toutes. Par conséquent, les 4 solutions sont  $h = \pm\sqrt{\lambda} p \pm \sqrt{\mu} q$ .

⑧ Définissons la matrice  $K$  diagonale par blocs de la façon suivante :

$$K = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline & I_{k-2} \end{array} \right),$$

où  $I_{k-2}$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_{k-2}(\mathbb{R})$  (bien définie car  $k \geq 2$ ).

Alors un produit par blocs donne immédiatement  $K^2 = I_k$ .

⑨ On va raisonner matriciellement. Appelons  $k$  l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  ( $k \geq 2$ ) et considérons une base de diagonalisation  $\mathcal{B}_d$  pour  $f$ ; c'est également une base de diagonalisation pour  $p$  et  $q$  car  $p = \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu \text{id})$

et  $q = \frac{1}{\mu - \lambda}(f - \lambda \text{id})$ . De plus, dans la base  $\mathcal{B}_d$ , ces matrices sont définies par blocs comme suit :  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(f) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda I_k & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{n-k} \end{array} \right)$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \left( \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right)$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \left( \begin{array}{c|c} 0_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array} \right)$ . Soit alors  $p'$  l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}_d$  est :

$$M = \left( \begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right)$$

où la matrice  $K \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  a été définie à la question précédente. De plus,

- un produit par blocs donne  $M^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p)$ , donc  $p'^2 = p$ ;
- des produits par blocs donnent  $M \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) \cdot M = 0_n$ , donc  $p' \circ q = q \circ p' = 0_n$ ;
- comme  $M$  n'est pas diagonale,  $p' \notin F = \text{Vect}(p, q)$ .

En résumé, l'endomorphisme  $p'$  ainsi construit répond à la question.

⑩ Si  $\dim(E) \geq 3$ , alors  $\lambda$  ou  $\mu$  est d'ordre au moins 2. Supposons par exemple que c'est  $\lambda$ . Posons  $h = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$ , où  $p'$  est l'endomorphisme défini à la question précédente. On a  $h^2 = \lambda p + \mu q = f$  par propriétés de  $p'$  et  $q$ , et pourtant  $h \notin F$  car  $p' \notin F$  et  $\lambda \neq 0$ .

En conclusion,  $\mathcal{R}(f) \not\subset F$ .

### Partie III

① Pour tout  $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ , on a :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i \right) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=0}^{\ell} a_k \lambda_i^k \right) p_i = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

② Prenons  $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ . Alors  $P(\lambda_i) = 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ , et d'après la question précédente  $P(f) = 0$ . Le polynôme  $P$  est annulateur de  $f$  et il est scindé à racines simples. Donc  $f$  est diagonalisable.

③ D'après la question 1),  $L_{\ell}(f) = \sum_{i=1}^m L_{\ell}(\lambda_i) p_i$ . Mais  $L_{\ell}(\lambda_i) = \delta_{\ell,i}$  (où  $\delta_{\ell,i} = 1$  si  $\ell = i$  et 0 si  $\ell \neq i$ ).

Donc  $L_\ell(f) = p_\ell$ . De plus,

$$(f - \lambda_\ell \text{id}) \circ p_\ell = (f - \lambda_\ell \text{id}) \circ L_\ell(f) = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m (f - \lambda_i \text{id})}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^m (\lambda_\ell - \lambda_i)}$$

Il en résulte que  $\text{Im}(p_\ell) \subset \ker(f - \lambda_\ell \text{id})$ .

En outre, le polynôme  $P(X)$  de la question 2) est annulateur de  $f$  et a pour racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Donc  $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Et par hypothèse, pour tout  $1 \leq \ell \leq m$ ,  $p_\ell \neq 0$  donc  $\text{Im}(p_\ell) \neq \{0_E\}$  et  $\ker(f - \lambda_\ell \text{id}) \neq \{0_E\}$ . Ceci signifie que  $\lambda_\ell$  est effectivement une valeur propre de  $f$ .

Finalement, on a bien  $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ .

④ Comme  $p_\ell(f) = L_\ell(f)$ ,  $p_i \circ p_j = (L_i \cdot L_j)(j)$ .

• Si  $i \neq j$ , le polynôme  $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$  divise  $(L_i \cdot L_j)(X)$ .

Comme  $P(f) = 0$ , on a donc  $(L_i \cdot L_j)(f) = 0$  et  $p_i \circ p_j = 0$ .

• Si  $i = j$ , comme  $\text{id} = \sum_{k=1}^m p_k$  (relation de l'énoncé pour  $k = 0$ ),

en composant par  $p_i$  on obtient  $p_i^2 = p_i$ .

⑤ L'endomorphisme  $f$  étant diagonalisable, d'après le cours on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^m \ker(f - \lambda_i \text{id}).$$

Le fait que chaque  $p_i$  est un projecteur a été démontré

à la question précédente. De plus, comme  $\text{id} = \sum_{k=1}^m p_k$

on a  $E = \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$ . Or on a vu que  $\text{Im}(p_i) \subset$

$E_{\lambda_i}(f) = \mathbb{D}$ . D'après la somme directe précédente, on a donc  $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$  et  $\text{Im}(p_i) = E_{\lambda_i}(f)$  pour tout  $i$ . Enfin le fait que  $p_i \circ p_j = 0$  pour  $i \neq j$  montre que

les  $p_i$  sont les projecteurs associés à cette somme directe.

⑥ Ecrivons une combinaison linéaire nulle des  $(p_i)_{1 \leq i \leq m}$  :

$$\sum_{i=1}^m a_i p_i = 0. \text{ Soit } \ell \in \llbracket 1, m \rrbracket. \text{ En composant par } p_\ell, \text{ on obtient}$$

$a_\ell p_\ell = 0$ , d'où  $a_\ell = 0$  car  $p_\ell$  n'est pas nul d'après l'énoncé.

Ainsi tous les coefficients  $a_i$  sont nuls et la famille  $(p_1, \dots, p_m)$

est libre. Donc  $\dim(F) = m$ .

⑦ Soit  $h = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \in F$  telle que  $h^2 = f$ . Alors  $h^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 p_i =$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i \text{ et comme la famille } (p_1, \dots, p_m) \text{ est libre, } \alpha_i^2 = \lambda_i \text{ pour}$$

tout  $i$ . Réciproquement, tous les  $h$  vérifiant cette relation sont

solutions. En résumé,  $\mathcal{R}(f) \cap F = \left\{ \sum_{i=1}^m \pm \sqrt{\lambda_i} p_i \right\}$ .

⑧ a Si  $m = n$ , il y a  $n$  sous-espaces propres dans l'espace  $E$  de dimension  $n$ .

Donc la dimension de chaque sous-espace propre de  $f$  est égale à 1.

**b** m Si  $h \in \mathcal{R}(f)$ ,  $h \circ f = h^3 = f \circ h$ . Donc  $h$  et  $f$  commutent et d'après le cours, tout espace propre  $E_{\lambda_i}(f)$  est stable par  $h$ . Soit  $x$  un vecteur propre de  $f$ , par exemple  $x \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$ . Comme  $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$ ,  $h(x) = \mu_i x$  et  $x$  est vecteur propre pour  $h$ .

**c** Soit  $h \in \mathcal{R}(f)$ . D'après la question précédente, pour tout  $1 \leq i \leq m$ , il existe  $\mu_i \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ ,  $h(x_i) = \mu_i x_i$ .

Soit  $x \in E$ . Comme  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f)$ ,  $x = x_1 + \dots + x_n$  avec  $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$  et

$$h(x) = h(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(x)$$

soit  $h = \sum_{i=1}^m \mu_i p_i$ . Donc  $\mathcal{R}(f) \subset F$ .

En reprenant la question III.7), on voit qu'une condition nécessaire et suffisante sur les  $\lambda_i$  pour que  $\mathcal{R}(f)$  soit non vide est :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$ .

⑨ Si  $m < n$ , alors il existe  $i$  tel que  $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geq 2$ . Si les  $\lambda_i$  sont positifs ou nuls, on peut alors reprendre le même raisonnement qu'à la question II.10), qui montre que  $\mathcal{R}(f) \not\subset F$ .

**Partie IV**

A)

① Soit  $x \in E$  tel que  $f^{p-1}(x) \neq 0_E$  et  $(a_1, \dots, a_p)$  une famille de

réels tels que  $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0$ .

En composant par  $f^{p-1}$ , comme  $f^q = 0$  pour tout  $q \geq p$ , on obtient  $a_0 f^{p-1}(x) = 0$  donc  $a_0 = 0$ . On recommence en composant par  $f^{p-2}, \dots, f$ , ce qui donne au final  $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$ .

Donc la famille  $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre. Cette famille a  $p$  éléments dans un espace de dimension  $n$ , donc  $p \leq n$  et  $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$ .

② Si  $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ , soit  $h \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $h^2 = f$ . Alors  $h^{2n} = f^n = 0$  donc  $h$  est nilpotent et d'après 1),  $h^n = 0$ . De plus,  $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$  donc  $2p - 2 \leq n - 1$ , i.e.  $2p - 1 \leq n$ .

③ On sait d'après le cours que pour  $\alpha \notin \mathbb{N}, x \in ]-1; 1[$ ,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + O(x^n)$$

au voisinage de 0. Ici,  $\alpha = \frac{1}{2}$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,

$$a_k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

④ D'après la question précédente, pour  $-1 < x < 1$ ,  $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \gamma(x)$  où  $\gamma$  est une fonction bornée au voisinage de 0. En élevant au carré, cela donne  $1+x = (P_n(x) + x^n \gamma(x))^2 = P_n^2(x) + x^n(2P_n(x)\gamma(x) + x^n \gamma(x)^2) = P_n^2(x) + x^n \eta(x)$  pour une fonction  $\eta$  bornée au voisinage de 0.

Posons alors  $Q_n(x) = P_n^2(x) - x - 1$ ; c'est une fonction

polynôme. D'après la relation précédente,  $x \mapsto Q_n(x)/x^n$  est une fonction bornée au voisinage de 0. Ceci n'est possible que si  $Q_n(X)$  n'admet pas de terme en  $X^k$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , ce qui entraîne  $X^n$  divise  $Q_n(X)$ .

On écrira dans la suite  $Q_n(X) = X^n \cdot S_n(X)$  où  $S_n$  est une fonction polynôme.

⑤ • D'après les résultats des questions précédentes,  $(P_n(f))^2 - f - \text{id} = (P_n^2)(f) - f - \text{id} = f^n \circ S_n(f)$ . Or  $f^n = 0$  d'après 1), donc  $(P_n(f))^2 = f + \text{id}$ , i.e.  $P_n(f) \in \mathcal{R}(f + \text{id})$ . Donc  $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$ .

• Plus généralement,  $(P_n(\alpha f))^2 - \alpha f - \text{id} = (P_n^2)(\alpha f) - \alpha f - \text{id} = (\alpha f)^n \circ S_n(\alpha f)$ . Comme  $f^n = 0$ ,  $(P_n(\alpha f))^2 = \alpha f + \text{id}$ , i.e.  $P_n(\alpha f) \in \mathcal{R}(\alpha f + \text{id})$ . Donc  $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$ .

• Comme  $\beta \neq 0$ , soit  $h \in \mathcal{R}(\frac{1}{\beta}f + \text{id})$  (c'est possible d'après ce qui précède). Alors  $h^2 = \frac{1}{\beta}f + \text{id}$  et comme  $\beta > 0$ ,  $(\sqrt{\beta}h)^2 = f + \beta \text{id}$ . Donc  $\sqrt{\beta}h \in \mathcal{R}(f + \beta \text{id})$  et  $\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset$ .

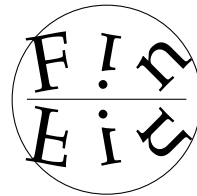
B)

① La matrice  $T - \lambda I_n$  est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale; il en résulte que  $\text{rg}(T - \lambda I_n) \leq n - 1$ . Un calcul matriciel simple montre que  $\text{rg}((T - \lambda I_n)^k) \leq n - k$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  et en particulier pour  $k = n$  :  $\text{rg}((T - \lambda I_n)^n) = 0$ , i.e.  $(T - \lambda I_n)^n = 0$ .

Remarquons que cette question peut se traiter directement en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, mais que ce théorème est hors programme en PC.

② Comme  $f$  est un endomorphisme de  $E$  dont le polynôme caractéristique est scindé, il est trigonalisable. De plus, comme  $f$  n'admet qu'une seule valeur propre  $\lambda$ , il existe une base dans laquelle la matrice  $T$  de  $f$  est triangulaire supérieure, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel  $\lambda$ . D'après la question précédente,  $(T - \lambda I_n)^n = 0_n$  et  $(f - \lambda \text{id})^n = 0$ . Donc  $E = \ker(f - \lambda \text{id})^n$ .

③ D'après la partie A), comme  $(f - \lambda \text{id})^n = 0$ ,  $\mathcal{R}((f - \lambda \text{id}) + \lambda \text{id}) \neq \emptyset$  (question A)5) en prenant  $\beta = \lambda$  et en remplaçant  $f$  par  $f - \lambda \text{id}$ ). Donc si  $\lambda > 0$  alors  $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ .



À la prochaine