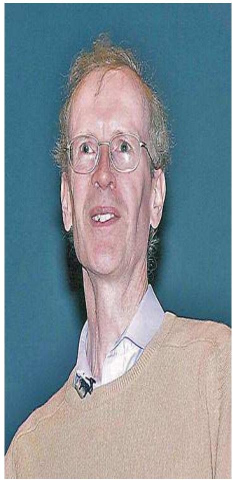
Devoir libre

6 Commutant d'une matrice

Blague du jour

• Quel est le genre d'humour que les dindes n'aiment pas ?
☛ Réponse : les farces.
• Pourquoi les lapins jouent-ils avec 46 cartes au lieu de 52 cartes ?
☛ Réponse : parce qu'ils ont mangent les trèfles !
• C'est une bande de poissons en train de faire des bêtises, quand l'un voit une étoile de mer et dit : Attention voilà le shérif qui arrive !



Sir Andrew John Wiles (1953-)

Mathématicien britannique, connu pour sa démonstration du dernier théorème de Fermat en 1994, résolvant ainsi l'un des problèmes les plus connus de l'histoire des mathématiques en travaillant dans le plus grand secret pendant huit ans. Pour dévoiler sa démonstration, Wiles s'y prend de manière quasi théâtrale. Il annonce trois conférences (les 21, 22 et 23 juin 1993) sans en donner l'objet, ce qu'il ne fait que lors de la dernière en précisant que le grand théorème de Fermat est un corollaire de ses principaux résultats. Son travail met ainsi fin à une recherche qui a duré plus de 300 ans.

Mathématicien du jour

Énoncé : (extrait e3a 2011, MP)

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, le polynôme caractéristique d'une matrice A est noté χ_A, le polynôme minimal de la matrice A est noté P_A.
On appelle commutant de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(A)$ qui commutent avec la matrice A.
On suppose dans tout cet exercice $P_A = \chi_A$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

① On suppose dans cette question que P_A est à racines simples α, β et γ.

a Montrer que la matrice A est diagonalisable.

b Soit B une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A, montrer que la matrice B est diagonalisable.

c Montrer qu'il existe un polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\begin{cases} T(\alpha) = a \\ T(\beta) = b \\ T(\gamma) = c \end{cases},$$

où a, b et c sont les valeurs propres de la matrice B.

d En déduire que le polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifie l'égalité
$$B = T(A).$$

e En déduire le commutant de la matrice A.

② On suppose, dans cette question, qu'il existe un nombre complexe λ tel que $P_A = (X-\lambda)^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice A.

a Montrer que l'endomorphisme $g = f - \lambda Id$ est nilpotent d'indice 3, c'est-à-dire vérifie les relations suivantes : $\begin{cases} g^3 = 0 \\ g^2 \neq 0 \end{cases}$.

b Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{C}^3$ tel que la famille $(u, g(u), g^2(u))$ soit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$.

c Soit H une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A. On appelle h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice H et on note $h(u) = x_1 u + x_2 g(u) + x_3 g^2(u)$, où x_1, x_2, x_3 sont trois nombres complexes. Déterminer, en fonction de x_1, x_2, x_3, la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

d Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant
$$H = Q(A).$$

e En déduire le commutant de la matrice A.

③ On suppose, dans cette question, qu'il existe deux nombres complexes distincts λ_1 et λ_2 tels que
$$P_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^2.$$

a Montrer
$$\mathbb{C}^3 = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \ker(f - \lambda_2 Id)^2.$$

b Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, avec $U = \lambda_2 I_2 + N$, I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2, c'est-à-dire vérifiant les propriétés suivantes : $\begin{cases} N^2 = 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$.

c On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, où $\begin{cases} \mu \in \mathbb{C} \\ L \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}) \\ C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \end{cases}$, on suppose que les matrices M et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ commutent.

i Montrer $\begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ NV = VN \end{cases}$.

ii Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $R(U) = V$.

iii Montrer qu'il existe un polynôme S de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{cases} X - \lambda_1 \text{ divise } S - \mu \\ (X-\lambda_2)^2 \text{ divise } S - R \end{cases}$.

iv En déduire $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$.

d Déterminer le commutant de la matrice A.