.

Mamouni My Ismail

Devoir libre 6

Exponentielle de matrices

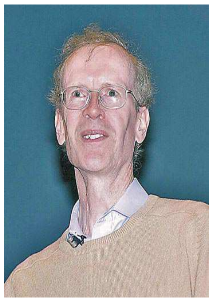
MP-CPGE Rabat

16 octobre 2010

Source : CCP, 2010, MP, Math 2

Blague du jour

● Quel est le genre d'humour que les dindes n'aiment pas ?
Réponse : les farces.
● Pourquoi les lapins jouent-ils avec 46 cartes au lieu de 52 cartes ?
Réponse : parce qu'ils ont mangent les trèfles !
● C'est une bande de poissons en train de faire des bêtises, quand l'un voit une étoile de mer et dit : Attention voilà le shérif qui arrive !



Sir Andrew John Wiles (1953-)

Mathématicien du jour

Mathématicien britannique, professeur à l'université de Princeton, aux États-Unis. Il est surtout connu pour sa démonstration du dernier théorème de Fermat en 1994, résolvant ainsi l'un des problèmes les plus connus de l'histoire des mathématiques. Travaillant dans le plus grand secret pendant huit ans, et faisant part de ses idées et progrès à Nicholas Katz, un collègue de Princeton, Wiles démontre la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil et, par conséquent, le théorème de Fermat. Pour dévoiler sa démonstration, Wiles s'y prend de manière quasi théâtrale. Il annonce trois conférences (les 21, 22 et 23 juin 1993) sans en donner l'objet, ce qu'il ne fait que lors de la dernière en précisant que le grand théorème de Fermat est un corollaire de ses principaux résultats. Son travail met ainsi fin à une recherche qui a duré plus de 300 ans.

QUELQUES UTILISATIONS DES PROJECTEURS

Notations et objectifs :

Dans tout le texte E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note id l'endomorphisme identité de E, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E qui, à un vecteur x de E se décomposant comme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur x_1.

On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de A est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

De même si u est un endomorphisme de E, l'exponentielle de u est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

Dans les parties II. et III., on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable. Dans la dernière partie IV., on utilise les projections orthogonales pour calculer des distances à des parties.

Les quatre parties sont indépendantes.

I. Questions préliminaires

1. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ (pour $\exp(A+B)$, on donnera la réponse en utilisant les fonctions ch et sh).
2. Rappeler sans démonstration, une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r,$$

où r désigne un entier vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$.

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$.
   On considère l'application linéaire ϕ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :
   $$P \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_r)).$$
   Déterminer le noyau de ϕ, puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $L(\lambda_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i}$.
4. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :
   $$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$
   (a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, \dots, r\}$.
   (b) En déduire une expression du polynôme L comme une combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, \dots, r\}$.
5. *Une propriété de l'exponentielle* : soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto PMP^{-1}$ est une application continue.
   (b) En déduire que :
   $$\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}.$$

6. Déduire des questions **3.** et **5.** que $\exp(A) = L(A)$.
7. On suppose que E est munie d'une base $\mathcal{B}$ et on désigne par v l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A. Soit λ une valeur propre de v, et x un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$P(v)(x) = P(\lambda)x.$$
8. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $E_i = \mathrm{Ker}(v - \lambda_i\,\mathrm{id})$ le sous-espace propre de v associé à λ_i.
   (a) Démontrer que l'endomorphisme de E, $p_i = l_i(v)$ est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} E_k$ (on dit que les p_i sont les projecteurs spectraux de v).
   (b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $(X-1)^2(X-2)$.

9. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.
10. Écrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X-1)^2(X-2)$.
11. Démontrer, sans aucun calcul, que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^2 \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$.
12. On considère les endomorphismes de E : $p = (u - \mathrm{id})^2$ et $q = u \circ (2\,\mathrm{id} - u)$. Calculer $p + q$.
13. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id})$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^2$. Que dire de l'endomorphisme q ?
14. Soit x un élément de E.
    (a) Préciser $(u - 2\,\mathrm{id})\,(p(x))$.
    (b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout entier naturel k, $u^k \circ p = \alpha^k p$.
    (c) En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où β est un réel à déterminer.
15. Que vaut pour tout entier $k \geqslant 2$, $(u - \mathrm{id})^k \circ q$?
    Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$ où γ est un réel à déterminer (on pourra écrire en justifiant que $\exp(u) = \exp(\mathrm{id}) \circ \exp(u - \mathrm{id})$).
16. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u.

IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace E est muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$, est définie par :
$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur F, noté p_F le projecteur sur F, parallèlement à $F^\perp$.

Enfin, si x est un vecteur de E, la distance euclidienne de x à F, notée $\mathrm{d}(x, F)$ est le réel :
$$\mathrm{d}(x, F) = \inf\{\|x - y\| \quad | \quad y \in F\}.$$

17. *Théorème de la projection orthogonale* : soit F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E. Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer $\mathrm{d}(x, F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$.
18. *Cas des hyperplans* : soit n un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à n, c'est à dire $H = (\mathrm{Vect}\,\{n\})^{\perp}$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $\mathrm{d}(x, H)$ en fonction de $< x, n >$ et de $\|n\|$.
19. *Une application* : dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant Tr la trace,
$$< A, B > = \mathrm{Tr}({}^t AB).$$
Enfin on note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
    (a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^{\perp}$.
    (b) Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $\mathrm{d}(M, H)$.
20. *Et pour une norme non euclidienne ?* Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie notée N_∞ : si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,\{(1, 0)\}$ et $x = (1, 1)$. Déterminer la distance «infinie» du vecteur x à F, c'est-à-dire le réel :
$$\mathrm{d}_\infty(x, F) = \inf\{N_\infty(x - y) \quad | \quad y \in F\},$$
et préciser l'ensemble des vecteurs m pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire $\mathrm{d}_\infty(x, F) = N_\infty(x - m)$. Commenter.

Fin