Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre 6 (Pr Dufait)

Exponentielle de matrices

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Un fils de banquier à son père : Papa, prête-moi 20 dhs, mais ne m'en donnes que 10. Le père demande : Pourquoi, mon garçon ? Le fils répond : Comme ça tu me devras 10 dhs, je te devrai 10 dhs et nous serons quittes !
- Une mère au service de scolarité : Je refuse de vous payer l'assurance scolaire pour les petits car moi j'élève mes enfants à la dure et si ils leurs arrivent quelque chose c'est comme ça qu'ils apprendront que la vie c'est pas une partie de plaisir.

Charles mile Picard, (1856-1941)

Mathématicien du jour

Mathématicien français, deuxième au concours d'entrée de l'école polytechnique, premier à celui de l'école normale supérieure, et premier au concours d'agrégation de mathématiques. Les travaux très innovants de Picard ouvrirent la voie à de nouvelles recherches. Il fut le premier à utiliser le théorème du point fixe de Banach dans une méthode d'approximations successives de solutions d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. On lui doit également des travaux en géométrie algébrique et des recherches appliquées sur l'élasticité et sur la chaleur. Son Traité d'analyse constitua longtemps une référence, mais Picard fut aussi philosophe et historien des sciences. Il épouse la fille de son professeur Charles Hermite. Sa fille Louise Picard épousa le physicien Louis Dunoyer.

Partie I

1. $\diamond$ On a $A^2 = 0$ donc $\forall k \geqslant 2,\ A^k = 0$ donc $\exp(A) = I_2 + A$ soit $\underline{\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

$\diamond$ $B = {}^tA$ et l'application $M \mapsto {}^tM$ est un endomorphisme d'un epace vectoriel de dimension fine donc continue. Ainsi $\exp({}^tA) = {}^t(\exp(A))$ donc $\underline{\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

$\diamond$ On a donc directement $\underline{\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

$\diamond$ Soit $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $C^2 = I_2$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ C^{2k} = I_2$ et $C^{2k+1} = C$ donc $\exp(C) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!}\right) I_2 + \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!}\right) C = \operatorname{ch} 1\, I_2 + \operatorname{sh} 1\, C$ donc $\underline{\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & \operatorname{sh} 1 \\ \operatorname{sh} 1 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix}}$.

2. $\diamond$ Si on veut rester dans le cadre du programme, on peut utiliser le fait que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp((s+t)M) = \exp(sM)\exp(tM).$$

Ainsi une condition suffisante est $\underline{\exists\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists\,(s,t) \in \mathbb{R}^2,\ A = tM,\ B = sM}$.

$\diamond$ Une condition suffisante usuelle (mais qui n'est pas explicitement au programme) est $\underline{AB = BA}$.

Remarquons que cette condition n'est pas nécessaire: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\pi \\ 0 & 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ bien que $AB \neq BA$.

.

Partie II

3. $\diamond$ Si $P \in \operatorname{Ker}\phi$ alors $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_r) = 0$ donc P admet r racines distinctes. Or $\deg(P) \leqslant r-1$ donc ceci implique que $P = 0$. Comme $0 \in \operatorname{Ker}\phi$, on a $un\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$.

$\diamond$ Ainsi ϕ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$. Mais $\dim\big(\mathbb{R}_{r-1}[X]\big) = \dim\big(\mathbb{R}^r\big)$ donc ϕ est une bijection. Tout élément de $\mathbb{R}^r$ admet donc un unique antécédent par ϕ et c'est notamment le cas pour $\big(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_r}\big)$.

Ainsi il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, r]\!],\ L(\lambda_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i}$.

4. **(a)** On a facilement $l_i(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$.

(b) Si L s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(l_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$: $L = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i l_i$ alors $\forall j \in [\![1, r]\!]$, $\mathrm{e}^{\lambda_j} = L(\lambda_j) = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i l_i(\lambda_j) = \alpha_j$ selon [**a**]. Réciproquement, le polynôme $P = \sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} l_i$ vérifie $\forall j \in [\![1, r]\!],\ P(\lambda_j) = \mathrm{e}^{\lambda_j}$ et $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ donc $P = L$. Ainsi $L = \sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} l_i$.

5. **(a)** Toute application linéaire de source un espace vectoriel de dimension finie et de but un espace vectoriel normé quelconque est continue. Donc, ici, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue .

(b) Par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N},\ \big(PDP^{-1}\big)^k = PD^kP^{-1}$ donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\big(PDP^{-1}\big)^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{PD^kP^{-1}}{k!} = P\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{D^k}{k!}\right)P^{-1}$. Par définition, le premier membre tend quand N tend vers $+\infty$ vers $\exp\big(PDP^{-1}\big)$ tandis que le second tend quand N tend vers $+\infty$ vers $P\exp(D)P^{-1}$ grâce à la continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$ car $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{D^k}{k!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \exp(D)$. Donc $\exp\big(PDP^{-1}\big) = P\exp(D)P^{-1}$.

6. Puisque A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{Diag}\big(\mu_1, \dots, \mu_n\big)$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors,par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = \operatorname{Diag}\big(\mu_1^k, \dots, \mu_n^k\big)$ donc, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(D) = \operatorname{Diag}\big(P(\mu_1), \dots, P(\mu_n)\big)$. Ainsi, d'une part, $\forall N \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{D^k}{k!} = \operatorname{Diag}\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{\mu_1^k}{k!}, \dots, \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\mu_n^k}{k!}\right)$ et donc $\exp(D) = \operatorname{Diag}\left(\mathrm{e}^{\mu_1}, \dots, \mathrm{e}^{\mu_n}\right)$ et, d'autre part, $L(D) = \operatorname{Diag}\big(L(\mu_1), \dots, L(\mu_n)\big) = \operatorname{Diag}\left(\mathrm{e}^{\mu_1}, \dots, \mathrm{e}^{\mu_n}\right)$ car chaque μ_j appartient à $\operatorname{Sp}(A) = \big\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\big\}$.
Donc $\exp(A) = \exp\big(PDP^{-1}\big) = P\exp(D)P^{-1} = PL(D)P^{-1}$. Or, comme au [**5.b**], on a $L\big(PDP^{-1}\big) = PL(D)P^{-1}$ donc $\exp(A) = L(A)$.

7. Par récurrence immédiate, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ v^k(x) = \lambda^k x$ donc, si $P = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$, $P(v)(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k v^k(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k \lambda^k x = \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k \lambda^k\right) x$ soit $P(v)(x) = P(\lambda)x$.

8. **(a)** Tout x de E s'écrit $x = \sum\limits_{j=1}^{r} x_j$ avec $x_j \in E_j$ donc

$$l_i(v)(x) = \sum_{j=1}^{r} l_i(x_j) \underset{[\mathbf{7}]}{=} \sum_{j=1}^{r} l_i(\lambda_j)x_j \underset{[\mathbf{4.a}]}{=} x_i$$

donc $p_i = l_i(v)$est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} E_k$.

(b) On a donc $\exp(A) \underset{[\mathbf{6}]}{=} L(A) \underset{[\mathbf{4.b}]}{=} \sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} l_i(A) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} l_i\left(\operatorname{Mat}(v, \mathcal{B})\right) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \operatorname{Mat}\big(l_i(v), \mathcal{B}\big)$ ce qui donne avec [**a**], $\exp(A) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \operatorname{Mat}\big(p_i, \mathcal{B}\big)$.

.

Partie III

9. Si u était diagonalisable, son polynôme minimal aurait des racines simples. Donc $\underline{u \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

10. $\underline{\text{Prenons } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$: on a $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$ donc $\pi_A(X) = (X-1)^m(X-2)$ avec $1 \leqslant m \leqslant 2$. Mais $E_1(A) = \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas diagonalisable donc $m \neq 1$ et A répond à la question.

11. Puisque $\pi = (X-1)^2(X-2)$ est annulateur pour u, on a $E = \operatorname{Ker}\big[\pi(u)\big] = \operatorname{Ker}\big[(u - \mathrm{id})^2 \circ (u - 2\mathrm{id})\big]$. Or $(X-1)^2$ et $X-2$ sont premiers entre eux donc le théorème de décomposition des noyaux donne $\underline{E = \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big] \oplus \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big]}$.

12. $(u-\mathrm{id})^2 + u \circ (2\mathrm{id} - u) = (u^2 + 2u + \mathrm{id}) + (2u - u^2)$ soit $\underline{p + q = \mathrm{id}}$.

13. $\diamond$ Selon [**11**], tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big]$. On a alors

$$p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) + (\mathrm{id} - q)(x_2) = (u-\mathrm{id})^2(x_1) + x_2 + u \circ (u - 2\mathrm{id})(x_2) = 0_E + x_2 + 0_E$$

donc $p(x) = x_2$. Donc $\underline{p \text{ est le projecteur sur } \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big], \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]}$.

$\diamond$ $q(x) = x - p(x) = x_1$ donc $\underline{q \text{ est le projecteur sur } \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big], \text{ parallèlement à } \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big]}$.

14. (a) $\forall x \in E,\ p(x) \in \operatorname{Ker}\big[u - 2\mathrm{id}\big]$ donc $\underline{\forall x \in E,\ (u - 2\mathrm{id})(p(x)) = 0_E}$.

(b) La démonstration vue à la question [**7**] donne $\forall x \in E,\ u^k(p(x)) = 2^k p(x)$ donc $\underline{u \circ p = 2^k p}$.

(c) Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{u^k}{k!}\right) \circ p = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{u^k \circ p}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{2^k p}{k!} = \left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{2^k}{k!}\right) p$. Or l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$: $v \mapsto v \circ p$ est continue car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. De même, l'application linéaire $t \mapsto tp$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$. En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient $\underline{\exp(u) \circ p = \mathrm{e}^2 p}$.

15. $\diamond$ $\forall x \in E,\ q(x) \in \operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]$ donc $\forall k \geqslant 2,\ (u-\mathrm{id})^k(q(x)) = (u-\mathrm{id})^{k-2}\big[(u-\mathrm{id})^2(q(x))\big] = (u-\mathrm{id})^{k-2}(0_E) = 0_E$ donc $\underline{\forall k \geqslant 2,\ (u-\mathrm{id})^k \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}}$.

$\diamond$ **Méthode 1:** *en utilisant le résultat hors-programme :* $\big(v \circ w = w \circ v\big) \Rightarrow \big(\exp(v+w) = \exp(v) \circ \exp(w)\big)$.

Ainsi $\forall N \geqslant 2$, $\left(\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{(u-\mathrm{id})^k}{k!}\right) \circ q = q + (u - \mathrm{id}) \circ q = u \circ q$ donc, comme au [**14.c**], en passant à la limite $\exp(u - \mathrm{id}) \circ q = u \circ q$. D'autre part, le résultat du [**8**] s'applique à l'identité et donc $\exp(\mathrm{id}) = \mathrm{e}^1\,\mathrm{id}$. Comme id et $u - \mathrm{id}$ commutent, on a $\exp(u) \circ q = \exp(\mathrm{id} + u - \mathrm{id}) \circ q = \exp(\mathrm{id}) \circ \exp(u - \mathrm{id}) \circ q = u \circ q = \mathrm{e}\,\mathrm{id} \circ u \circ q$ donc $\underline{\exp(u) \circ q = \mathrm{e}\, u \circ q}$.

Méthode 2: *en restant dans le cadre du programme* .

Effectuons la division euclidienne de X^k par $(X-1)^2$: $X^k = Q_k(X)(X-1)^2 Q_k(X) + a_k X + b_k$. En appliquant en 1, on a $1 = a_k + b_k$ et en prenant la dérivée en 1, on trouve $k = a_k$. Ainsi $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k \circ q = \big[Q_k(u) \circ (u - \mathrm{id})^2 + k\, u + (1-k)\,\mathrm{id}\big] \circ q = Q_k(u) \circ (u-\mathrm{id})^2 \circ q + k\, u \circ q + (1-k)\, q = k\, u \circ q + (1-k)\, q$ donc

$$\exp(u) \circ q = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}\right) u \circ q + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-k}{k!}\right) q = \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\right) u \circ q + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\right) q = \mathrm{e}\, u \circ q.$$

.

16. Ainsi $\exp(u)=\exp(u)\circ \mathrm{id}=\exp(u)\circ(p+q)=\exp(u)\circ p+\exp(u)\circ q=\mathrm{e}^2\,p+\mathrm{e}\,u\circ q$ et les résultats précédents donnent $\underline{\exp(u)=\mathrm{e}^2\,(u-\mathrm{id})^2-\mathrm{e}\,u^2\circ(u-2\mathrm{id})}$.

Partie IV

17. $\underline{\mathrm{d}(x,F)=\big\|x-p_F(x)\big\|}$.

18. $\left(\dfrac{n}{\|n\|}\right)$ est une base orthonormée de $H^\perp$ donc $p_{H^\perp}(x)=\left\langle\dfrac{n}{\|n\|},x\right\rangle\dfrac{n}{\|n\|}=\dfrac{\langle n,x\rangle}{\|n\|^2}\,n$ et $x-p_H(x)=p_{H^\perp}(x)$ donc $\underline{\mathrm{d}(x,H)=\dfrac{|\langle n,x\rangle|}{\|n\|}}$.

19. (a) $\diamond$ Tr est une forme linéaire non nulle et $H=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ donc $\underline{H\text{est un hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\diamond$ $M\in H\iff \mathrm{Tr}(M)=\mathrm{Tr}({}^tI_nM)=\langle I_n,M\rangle=0$ donc $H=\{I_n\}^\perp$ et donc $H^\perp=\left(\{I_n\}^\perp\right)^\perp$ soit $\underline{H^\perp=\mathbb{R}.I_n}$.

(b) La formule du [**18**] donne donc $\underline{\mathrm{d}(x,H)=\dfrac{|\mathrm{Tr}(M)|}{\sqrt{n}}}$.

20. $\diamond$ $y\in F$ si et seulement si $\exists\,t\in\mathbb{R},\ y=(t,0)$ donc $N_\infty(x-y)=\mathrm{Max}\,(|1-t|,1)$. Donc $\forall y\in F,\ N_\infty(x-y)\geqslant 1$ et $N_\infty(x-(1,0))=1$ donc $\underline{\mathrm{d}_\infty(x,F)=1}$.

$\diamond$
$$\begin{aligned}\Big(m\in F \text{ et } N_\infty(x-m)=\mathrm{d}_\infty(x,F)\Big)&\iff\Big(\exists\,t\in\mathbb{R},\ m=(t,0)\text{ et }\mathrm{Max}\,(|1-t|,1)=1\Big)\\&\iff\Big(\exists\,t\in\mathbb{R},\ m=(t,0)\text{ et }|1-t|\leqslant 1\Big)\\&\iff\Big(\exists\,t\in[0,2],\ m=(t,0)\Big)\end{aligned}$$
donc $\underline{\big\{m\in F\mid N_\infty(x-m)=\mathrm{d}_\infty(x,F)\big\}=[0,2]\times\{0\}}$.

$\diamond$ On peut remarquer que, contrairement au cas euclidien, la distance est atteinte en plusieurs vecteurs $m\in F$. Si on veut en dire un peu plus, on peut remarquer que pour une norme N quelconque dans un espace de dimension finie

$\big\{m\in F\mid N_\infty(x-m)=\mathrm{d}_\infty(x,F)\big\}$ est une partie non vide, convexe et compacte de F.

En effet, posons $d=\mathrm{d}_\infty(x,F)$ et $\mathcal{C}=\big\{m\in F\mid N_\infty(x-m)=\mathrm{d}_\infty(x,F)\big\}$, on a:

- $d\leqslant N(x-0_E)$ car $0_E\in F$ donc $d=\mathrm{Inf}\big\{N(x-y)\mid y\in F\cap B(x,N(x))\big\}$ et, comme $y\mapsto N(x-y)$ est continue sur E et que $F\cap B(x,N(x))$ est un compact en tant qu'intersection de F fermé et de $B(x,N(x))$ compact, cette borne inférieure et atteinte ce qui montre $\mathcal{C}\neq\emptyset$.
- $\mathcal{C}=F\cap S(x,d)$ est un compact, comme ci-dessus en tant qu'intersection de F fermé et de $S(x,d)$ compact.
- Si $(m_1,m_2)\in(\mathcal{C})^2$ et $\alpha\in[0,1]$, on a $m_3=\alpha\,m_1+(1-\alpha)m_2\in F$ et
$$d\leqslant N\big[x-m_3\big]=N\big[\alpha(x-m_1)+(1-\alpha)(x-m_2)\big]\leqslant \alpha N\big[x-m_1\big]+(1-\alpha)N\big[x-m_2\big]=d$$
donc $\alpha m_1+(1-\alpha)m_2\in\mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}$ est convexe.

Dans le cas où F est une droite, $\mathcal{C}$ est donc un segment.