CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشرَح لِي صَدرِي وَ يَسِّر لِي أَمرِي وَ
أَحلُل عُقدَة مِن لِسَانِي يَفقَهُوا قَولِي

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم
سورة طه

DS 1 (09-10): *Réduction d'endomorphismes*

Lundi 12 Octobre 2009

Durée: 4 heures

Blague du jour

Moins on en sait, plus on gagne. **En effet, la connaissance, c'est le pouvoir et le temps, c'est de l'argent. Comme le sait tout ingénieur, Puissance** $= \dfrac{\textbf{travail}}{\textbf{temps}}$

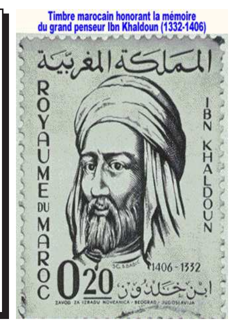
et comme ***connaissance = pouvoir*** **et** ***temps = argent*****, on a alors : connaissance** $= \dfrac{\textbf{travail}}{\textbf{argent}}$

On trouve : argent $= \dfrac{\textbf{travail}}{\textbf{connaissance}}$ **. Ainsi, quand la connaissance tend vers zéro, l'argent tend vers l'infini, quel que soit le travail effectué.**

Mathématicen du jour — ***Ibn khaldoun***

Ibn Khaldoun, de son nom complet Abou Zeid Abd er-Rahman Ben Mohamed Ben Khaldoun el-Hadramii (1332-1406), est un historien, philosophe et homme politique maghrébin, né en Tunisie.

Ibn Khaldoun demeure l'un des penseurs arabes les plus connus et les plus étudiés car il a souvent été présenté comme l'un des pères fondateurs de l'histoire, en tant que discipline intellectuelle, et de la sociologie. Ibn Khaldoun est aussi considéré comme l'un des premiers théoriciens de l'histoire des civilisations, ainsi que l'un des fondateurs de la sociologie politique.



CONCOURS NATIONAL COMMUN (CNC-MAROC), 1999

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Option MP

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

* * *

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

- $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
  On note $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E et Id_E l'application identité de E.
- E^* désigne le dual de E, c'est à dire $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $\mathcal{B}^*$ sa base duale.

- Pour tout endomorphisme u de E et tout vecteur non nul x de E, on note :

$$E_u(x) = \{P(u)(x);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$$

  On notera π_u (resp. χ_u) le polynôme minimal (resp. caractéristique) de u

  . On conviendra que : $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_u(\lambda) = \det\,(\lambda Id_E - u)$; en particulier χ_u est unitaire.

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si F est un sous-espace de E stable par u et non réduit à $\{0\}$. On dira :
  . que F est *irréductible* si les seuls sous-espaces de F stables par u sont $\{0\}$ et F.
  . que F est *indécomposable* s'il n'existe pas de décomposition de F en somme directe de deux sous-espaces stables par u et non réduits à $\{0\}$.
- Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par P sera noté (P).

Partie I

A - Sous-espaces monogènes et polynôme minimal.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, $x \neq 0$.

   1-1 Montrer que $E_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ et stable par u.

   Un tel sous-espace de E sera dit *u-monogène* (ou simplement *monogène* s'il n'y a pas d'ambiguité).

   1-2 On considère l'ensemble $\mathcal{I}_x$ des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$.

   Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$ et que si $P \in \mathcal{I}_x$, $P(u)$ induit sur $E_u(x)$ l'endomorphisme nul.

   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré supérieur ou égal à un - que l'on notera π_x - tel que $\mathcal{I}_x = \big(\pi_x\big)$.

   Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur x et u pour que $\deg(\pi_x) = 1$.

   1-3 Montrer que $\mathcal{B}_x = \big(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)\big)$ où $k = \deg(\pi_x)$ est une base de $E_u(x)$.

   1-4 On note u_x l'endomorphisme de $E_u(x)$ induit par u et $\pi_x = X^k - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$.

   Préciser $\mathrm{Mat}(u_x; \mathcal{B}_x)$ à l'aide de π_x.

   Montrer que le polynôme minimal de u_x est π_x.

   1-5 Donner un exemple dans le cas $n \geq 2$:

   (i) où $\pi_x = \pi_u$.

   (ii) où π_x divise strictement π_u et π_u divise strictement χ_u.

   D'une manière générale, peut-on affirmer que $E_u(x) = \ker \pi_x(u)$?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

   2-1 Soient a et b deux vecteurs non nuls de E. En utilisant les décompositions en produit de facteurs irréductibles de π_a et π_b, montrer qu'il existe des polynômes P_1, P_2, Q_1 et Q_2 tels que :

   (i) $\pi_a = P_1 P_2$ et $\pi_b = Q_1 Q_2$.

   (ii) $\mathrm{pgcd}(P_1, Q_1) = 1$.

   (iii) $\mathrm{ppcm}(\pi_a, \pi_b) = P_1 Q_1$.

   2-2 Soit $c = P_2(u)(a) + Q_2(u)(b)$. Montrer que $\pi_c = \mathrm{ppcm}(\pi_a, \pi_b\ )$.

3. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

   Montrer que $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_{e_1}, \ldots, \pi_{e_n})$.

   En déduire l'existence d'un vecteur x de E tel que $\pi_x = \pi_u$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un diviseur unitaire de π_u. Montrer l'existence de $y \in E$ tel que $\pi_y = P$.
5. *On donne dans cette question une application du résultat de la question* 3 :

   On considère deux sous-corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de $\mathbb{C}$ tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   On note π_K (respectivement π_L) le polynôme minimal de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$).

   Montrer tout d'abord que π_L divise π_K, puis en utilisant le résultat de la question 3, montrer que $\pi_L = \pi_K$.

B - Cas où E est u-monogène. Sous-espaces stables par u d'un espace u-monogène.

1. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme diagonalisable de E et que ses valeurs propres sont deux à deux distinctes. Montrer que E est u-monogène et déterminer $x \in E$ tel que $E = E_u(x)$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

   (i) E est u-monogène.

   (ii) $\pi_u = \chi_u$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $E = E_u(x)$.

   Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et non réduit à $\{0\}$.

   On considère $\mathcal{I}_F = \{P \in \mathbb{K}[X];\ P(u)(x) \in F\}$.

   Montrer que $\mathcal{I}_F$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En déduire que F est u-monogène.
4. 4-1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $\pi_u = PQ$ où P et Q sont deux polynômes unitaires de degré supérieur ou égal à un.

   On note v (respectivement w, v', w') l'endomorphisme de $\ker P(u)$ (respectivement $\ker Q(u)$, Im $P(u)$, Im $Q(u)$) induit par u.

   Montrer que $\ker P(u) \neq \{0\}$ et $\ker Q(u) \neq \{0\}$, puis que $\pi_{w'} = \pi_v = P$ et $\pi_{v'} = \pi_w = Q$.

   Montrer que si, de plus, E est u-monogène, $\dim(\ker P(u)) = \deg(P)$ et $\dim(\ker Q(u)) = \deg(Q)$.

   4-2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que E est u-monogène.

   Soit F un sous-espace stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u.
   Montrer, en utilisant la question précédente, que $F = \ker \pi_v(u)$.

   En déduire que E n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces stables par u.

Partie II

Dans cette partie on montre que, **quelque soit l'endomorphisme u de E, E est somme directe de sous-espaces u-monogènes** et plus précisément de sous-espaces stables par u et indécomposables. La première question traite d'un cas particulier et n'est pas nécessaire à la résolution des questions suivantes qui traitent du cas général.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

   1-1 Soit F un sous-espace de E stable par u et non réduit à $\{0\}$. On note $v = u_{/F}$.

   Montrer que F est irréductible si et seulement si F est monogène et π_v est irréductible.

   1-2 Montrer que E est somme directe de sous-espaces stables par u et irréductibles si et seulement si tous les facteurs irréductibles de π_u ont une multiplicité égale à 1.

   (*indication* :pour la réciproque on pourra considérer, pour un polynôme P irréductible, l'ensemble des parties finies $\mathcal{F}$ de $\ker P(u) \setminus\{0\}$ telles que la somme $\displaystyle\sum_{x\in\mathcal{F}} E_u(x)$ est directe).

. 2. Dans les questions suivantes u désigne toujours un endomorphisme de E.

On définit $\tilde{u} : E^* \mapsto E^*$ par $\tilde{u}(f) = f \circ u$.

Vérifier que $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E^*)$ et que : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall f \in E^*$, $P(\tilde{u})(f) = f \circ P(u)$.

En déduire que u et $\tilde{u}$ ont même polynôme minimal.

3. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, préciser $\mathrm{Mat}(\tilde{u}; \mathcal{B}^*)$ en fonction de $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$.

Retrouver le résultat de la question précédente.

4. On suppose dans cette question que $\pi_u = P^\alpha$ où P est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

4-1 Montrer l'existence de $g \in E^*$ et de $y \in E$ tels que $P^{\alpha-1}(\tilde{u})(g)(y) \neq 0$.

4-2 Montrer que $\pi_g = \pi_y = P^\alpha$.

On note alors $F = E_u(y)$ et $\mathcal{H} = \{Q(\tilde{u})(g);\ Q \in \mathbb{K}[X]\} = {E^*}_{\tilde{u}}(g)$.

4-3 Montrer que $G = \{x \in E;\ \forall f \in \mathcal{H},\ f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E de codimension $\deg(\pi_u)$ et que G est stable par u.

4-4 Soit x un vecteur non nul de F.

Montrer que l'on peut écrire x sous la forme $x = P^\beta Q(u)(y)$ où Q est un polynôme premier avec P et β un entier tel que $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$.

Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P^{\alpha-1-\beta}R(\tilde{u})(g)(x) \neq 0$.

4-5 En déduire que $E = F \oplus G$, puis que E est somme directe de sous-espaces u-monogènes.

5. Démontrer que, quelquesoit l'endomorphisme u de E, E est somme directe de sous-espaces u-monogènes.

6. 6-1 Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E stable par u et non réduit à $\{0\}$. On note $v = u_{/F}$.

Montrer que F est indécomposable si et seulement si F est monogène et $\pi_v = P^\alpha$ où P est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

6-2 En déduire que E est somme directe de sous-espaces stables par u et indécomposables.

Partie III - Applications.

A - Application aux endomorphismes nilpotents et idempotents.

1. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme *nilpotent* de E, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$.

1-1 Montrer l'existence d'un entier r tel que $1 \leq r \leq n$, $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$.

1-2 Montrer qu'il existe un vecteur e_1 de E tel que $\big(e_1, u(e_1), \ldots, u^{r-1}(e_1)\big)$ soit une base de $E_u(e_1)$ et tel que $E_u(e_1)$ admette un supplémentaire stable par u.

1-3 En déduire qu'il existe une base de E relativement à laquelle la matrice de u s'écrit sous la forme diagonale par blocs $\begin{pmatrix} J_1 & 0 & & \\ 0 & J_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & J_p \end{pmatrix}$ où p est un entier non nul et les matrices J_i sont des blocs $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'ordre r_i

avec $r_1 = r$ et $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_p$.

2. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme *idempotent* de E, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = Id_E$.
   - 2-1 On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Que peut-on dire de u ? E est-il u-monogène ?
   - 2-2 On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

     Montrer que E est somme directe de sous-espaces irréductibles.

     Donner, dans une base adaptée, une forme matricielle réduite de u.

B - " Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée ".

1. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E.

   $\tilde{u}$ est défini comme dans **II-2**.

   On suppose qu'il existe un vecteur x de E tel que $E = E_u(x)$.
   - 1-1 Expliquer - sans déterminer f explicitement - pourquoi il existe un élément f de E^* tel que $E^* = E^*_{\tilde{u}}(f)$.
   - 1-2 On note $\mathcal{B} = \big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big) = \big(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\big)$ et $\mathcal{B}^* = \big(e_0^*, e_1^*, \ldots, e_{n-1}^*\big)$ la base duale.

     Montrer que $\big(e_{n-1}^*, \tilde{u}(e_{n-1}^*), \ldots, \tilde{u}^{n-1}(e_{n-1}^*)\big)$ est une base de E^*.
   - 1-3 Montrer que ${}^t\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B})$ sont semblables.

2. Déduire de ce qui précède que, d'une manière générale, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

Fin
Bonne chance