CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé DS 1 (09-10): *Réduction d'endomorphismes*

Lundi 12 Octobre 2009

Blague du jour
Étudier = Échouer. **En effet, tout le monde sait que *étudier = ne pas échouer*, et que *ne pas étudier = échouer*, puis on somme les deux égalités et on simplifie par *ne pas* (le français est une langue régulière), d'où le résultat.**

Mathématicen du jour — ***Ibn Battouta***
Shams al-Din Abu 'Abdallah Muhammad ibn 'Abdallah ibn Muhammad ibn Ibrahim ibn Yusuf al-Lawati al-Tanji Ibn Battûta (1304-1369) est un explorateur et voyageur marocain, parcourant 120 000 km en 28 ans de voyages qui l'amènent de Tombouctou au sud à Bulghar (en actuelle Russie, sur la Volga) au nord ; de Tanger à l'ouest à Quanzhou en Extrême-Orient. Ses récits, compilés en un livre appelé Rihla (voyage) sont plus précis que ceux de Marco Polo, mais contiennent plusieurs passages qui relèvent clairement de la pure imagination, notamment ceux décrivant des êtres surnaturels.

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Ecoles d'Ingénieurs - MAROC - 1999

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

corrigé par Gilles Deruelle

Ex-enseignant en CPGE et CPA à Casablanca

* *

Partie I

I-A-1-1

- $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) \in E_u(x)$. **En particulier** $x = u^0(x) \in E_u(x)$**, donc** $E_u(x)$ **est non vide et non réduit à** $\{0\}$. $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \lambda P(u)(x) + \mu Q(u)(x) = (\lambda P(u) + \mu Q(u))(x) = (\lambda P + \mu Q)(u)(x)$ **montre que** $E_u(x)$ **est un sous-espace vectoriel de** E.

- **Soit** $P \in \mathbb{K}[X]$ **:** $u\big(P(u)(x)\big) = Q(u)(x)$ **avec** $Q = XP$**, montre que** $E_u(x)$ **est stable par** u.

I-A-1-2

- **Le polynôme nul appartient à** $\mathcal{I}_{\S}$.

  Soit $P \in \mathcal{I}_{\S}$ **et** $Q \in \mathbb{K}[X]$ **;** $PQ(u)(x) = QP(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x) = Q(u)\big(P(u)(x)\big) = Q(u)(0) = 0$.
  Donc $PQ \in \mathcal{I}_{\S}$ **et** $\mathcal{I}_{\S}$ **est bien un idéal de** $\mathbb{K}[X]$

  $\mathcal{I}_{\S} \neq \{/\}$ **: par exemple** χ_u, $\pi_u \in \mathcal{I}_{\S}$.

- **(Même calcul que ci-dessus) Soit** $P \in \mathcal{I}_{\S}$ **et** $Q \in \mathbb{K}[X]$ **;** $P(u)\big(Q(u)(x)\big) = PQ(u)(x) = QP(u)(x) = Q(u)\big(P(u)(x)\big) = Q(u)(0) = 0$**, ce qui montre bien que la restriction de** $P(u)$ **à** $E_u(x)$ **est l'endomorphisme nul de** $E_u(x)$.

- **L'existence de** π_x **découle du fait que l'anneau** $\mathbb{K}[X]$ **est principal. L'unicité de la condition imposée :** π_x **unitaire. Il est clair que** π_x **n'est pas nul puisque** $\mathcal{I}_{\S} \neq \{/\}$. **Par ailleurs** $\pi_x = 1 = X^0$ **impliquerait** $u^0(x) = x = 0$ **ce qui n'est pas. Finalement** $\deg \pi_x \geq 1$.

- **Supposons** $\deg \pi_x = 1$ **c'est à dire** π_x **de la forme** $X - \lambda$ **: alors** $u(x) - \lambda x = 0$ **; ce qui montre que** x **est un vecteur propre de** u **- associé à la valeur propre** λ.

  Réciproquement si $u(x) = \lambda x$**, le polynôme** $P = X - \lambda$ **vérifie** $P(u)(x) = 0$.
  Donc $P \in \mathcal{I}_{\S}$ **et** P **divise** π_x **; comme** $\deg P = 1$ **et** $\deg \pi_x \geq 1$, $P = \pi_x$ **(**P **et** π_x **sont unitaires).**

  En conclusion : $\deg \pi_x = 1$ **si et seulement si** x **est un vecteur propre de** u.

I-A-1-3

$\mathcal{B}_{\S}$ **est libre : une condition de dépendance linéaire non triviale de** $x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)$ **donnerait un polynôme** P **non nul et de degré strictement inférieur à** k **vérifiant** $P(u)(x) = 0$**, ce qui est en contradiction avec la nature de** π_x.

$\mathcal{B}_{\S}$ **est génératrice : soit** $P(u)(x) \in E_u(x)$**, puis** $P = \pi_x Q + R$ **avec** $\deg R < k$.
On a $P(u)(x) = R(u)(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x))$.

I-A-1-4

– **Ecrivons** $\pi_x = X^k - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$**. Le fait que** $\pi_x(u)(x) = 0$ **entraîne** $u^k(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} a_j u^j(x)$**.**

On obtient $\mathcal{M}_{(}(u)_x;\mathcal{B}_{\S}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k-1} \end{pmatrix}$

– **Pour tout** $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$**,** $\pi_x(u_x)(u^j(x)) = \pi_x(u) \circ u^j(x) = u^j \circ \pi_x(u)(x) = u^j(0) = 0$ **et donc** $\pi_x(u_x) = 0$**, ce qui implique que le polynôme minimal de** u_x **divise** π_x**.**

Par ailleurs tout polynôme P **annulateur de** u_x **vérifiant** $P(u_x)(x) = P(u)(x) = 0$**, appartient à** $\mathcal{I}_{\S}$ **; donc** π_x **divise** P **et en particulier** π_x **divise le polynôme minimal de** u_x**. Ces deux polynômes étant unitaires ...**

I-A-1-5

(i) Pour $u = \lambda.Id_E$ **,** $\pi_u = \pi_x = X - \lambda$ **pour tout** $x \neq 0$**.**

(ii) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ **défini par sa matrice** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **relativement à la base canonique** (e_1, e_2, e_3)**.**

On a pour $x = e_1$**,** $\pi_x = X - 1$**. Par ailleurs** $\pi_u = X^2 - 1$ **et** $\chi_u = (X-1)(X+1)^2$**.**

La question $I - A - 1 - 2$ **montre que** $E_u(x) \subset \ker \pi_x(u)$ **puisque la restriction à** $E_u(x)$ **de** $\pi_x(u)$ **est nulle. Mais cette inclusion peut très bien être stricte comme le montre l'exemple (ii) avec** $x = e_2$ **:** $\pi_x = X + 1$ **et** $\ker \pi_x(u) = \ker(u + e) = \text{Vect}(e_2, e_3)$**, alors que** $E_u(x) = \mathbb{R}e_2$**.**

I-A-2-1

On peut écrire $\pi_a = R_1^{\beta_1} \dots R_k^{\beta_k}$ **et** $\pi_b = R_1^{\gamma_1} \dots R_k^{\gamma_k}$ **avec** $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \beta_i$ **et** $\gamma_i \in \mathbb{N}$ **et où** $R_1, \dots, R_k$ **sont les facteurs irréductibles intervenant dans les décompositions de** π_a **et de** π_b**.**

Posons $P_1 = \displaystyle\prod_{i \in I} R_i^{\beta_i}$ **et** $Q_1 = \displaystyle\prod_{j \in J} R_j^{\gamma_j}$ **où** $I = \{i / \beta_i \geq \gamma_i\}$ **et** $J = \{j / \beta_j < \gamma_j\}$**.**

On a bien $P_1 Q_1 = \text{ppcm}(\pi_a, \pi_b)$ **et** $\text{pgcd}(P_1, Q_1) = 1$ **; il ne reste plus qu'à prendre** $P_2 = \dfrac{\pi_a}{P_1}$ **et** $Q_2 = \dfrac{\pi_b}{Q_1}$**.**

I-A-2-2

Soit $c = P_2(u)(a) + Q_2(u)(b)$**.**

- Le fait que $P_1 Q_1(u)(c) = 0$ **est immédiat et donc** π_c **divise** $P_1 Q_1$ **.**

- Si $P(u)(c) = 0$**,** $P_1 P(u)(c) = P_1 Q_2 P(u)(b) = 0$ **et donc** $\pi_b = Q_1 Q_2$ **divise** $P_1 Q_2 P$**, ce qui entraîne** Q_1 **divise** P **du fait que** P_1 **et** Q_1 **sont premiers entre eux. On montre de même que** P_1 **divise** P **et finalement** $P_1 Q_1$ **divise** P**. En conclusion** $\pi_c = P_1 Q_1 = \text{ppcm}(\pi_a, \pi_c)$**.**

I-A-3

Soit $P = \text{ppcm}(\pi_{e_1}, \dots, \pi_{e_n})$**. Le fait que** $P(u) = 0$ **s'obtient sans difficultés en appliquant** $P(u)$ **à tout vecteur de** E **écrit dans la base** $(e_1, \dots, e_n)$**. On en déduit que** π_u **divise** P**.**

Par ailleurs pour tout i**,** π_{e_i} **divise** π_u **; d'où** P **divise** π_u**.**

En conclusion $P = \pi_u$**.**

Le résultat du $I-A-2-2$ s'étend sans difficultés - associativité du ppmc **et récurrence - au cas d'un nombre quelconque de vecteurs non nuls. Il existe donc $x \in E$ tel que $\pi_x = P$.**

I-A-4

On peut écrire $\pi_u = PQ$. Notons alors $y = Q(u)(x)$ où x est tel que $\pi_x = \pi_u$.

D'une part, $P(u)(y) = PQ(u)(x) = \pi_x(u)(x) = 0$ montre que π_y divise P.

D'autre part, $\pi_y(u)(y) = \pi_y Q(u)(x) = 0$ montre que $\pi_u = PQ$ divise $\pi_y Q$ donc que P divise π_y.

I-A-5

- $\pi_K(A) = 0$ suffit pour donner π_L divise π_K.

- Soit $k = \deg \pi_K$. D'après ce qui précède, il existe $V \in \mathbb{K}^n$ tel que $\pi_V = \pi_K$. On sait alors que $(V, AV, \ldots, A^{k-1}V)$ est libre dans $\mathbb{K}^n$, donc dans $\mathbb{L}^n$ (raisonner avec les déterminants extraits ...) ; ceci a pour conséquence $\deg \pi_L \geq k$. Finalement $\deg \pi_L = k$ et $\pi_K = \pi_L$

I-B-1

Prendre $x = e_1 + \ldots + e_n$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Le déterminant de $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est un déterminant de VanderMonde , donc non nul puisque $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts.

$(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ étant alors une base de E, il est immédiat que $E_u(x) = E$.

I-B-2

Si $E = E_u(x)$, $\dim E_u(x) = \deg \pi_x = n$ et comme π_x divise π_u qui divise χ_u, on a bien $\pi_u = \chi_u$.

Supposons $\pi_u = \chi_u$. Soit $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$. On a donc $\dim E_u(x) = \deg \pi_u = \deg \chi_u = n$ qui montre que $E_u(x) = E$.

I-B-3

Soit $P \in \mathcal{I}_\mathcal{F}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $PQ(u)(x) = Q(u)\big(P(u)(x)\big) \in F$ puisque F est stable par u donc par $Q(u)$. Donc $PQ \in \mathcal{I}_\mathcal{F}$ et $\mathcal{I}_\mathcal{F}$ est bien un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Si $F = \{0\}$, $\mathcal{I}_\mathcal{F} = \mathcal{I}_\S = \big(\pi_\S\big)$. Si $F = E$, $\mathcal{I}_\mathcal{F} = \mathbb{K}[\mathcal{X}]$ et réciproquement. Notons enfin que $\mathcal{I}_\mathcal{F}$ contient toujours $\mathcal{I}_\S$ puisque F contient toujours $\{0\}$. $\mathbb{K}[X]$ étant principal, il existe un polynôme unitaire R
(de degré supérieur ou égal à un si $F \neq E$) tel que $\mathcal{I}_\mathcal{F} = \big(\mathcal{R}\big)$.

On a $F = \{P(u)(x)\ /\ P \in \mathcal{I}_\mathcal{F}\} = \{\mathcal{R}\mathcal{Q}(\sqcap)(\S); \mathcal{Q} \in \mathbb{K}[\mathcal{X}]\} = \{\mathcal{Q}(\sqcap)(\mathcal{R}(\sqcap)(\S)); \mathcal{Q} \in \mathbb{K}[\mathcal{X}]\}$ ce qui montre que $F = E_u(y)$ avec $y = R(u)(x)$.

I-B-4-1

- $\ker P(u) = \{0\}$ **signifierait $P(u)$ bijectif et donc impliquerait $Q(u) = 0$, ce qui est contradiction avec la nature de $\pi_u = PQ$. De même $\ker Q(u)$ ne peut être réduit à $\{0\}$.**

- **Notons $F = \ker P(u)$, $G = \ker Q(u)$, $F' = \mathrm{Im} P(u)$, $G' = \mathrm{Im} Q(u)$.**

  F, F', G, G' sont stables par u et l'on a $G' \subset F$ et $F' \subset G$ ce qui entraîne $\pi_{v'}$ divise π_w (qui divise Q) et $\pi_{w'}$ divise π_v (qui divise P).

  Par ailleurs $\pi_{w'}(u) \circ Q(u) = 0$, donc $\pi_u = PQ$ divise $\pi_{w'} Q$ d'où l'on tire P divise $\pi_{w'}$. En définitive $\pi_{w'} = \pi_v = P$. De même $\pi_{v'} = \pi_w = Q$.

– **Comme E est u-monogène, les sous-espaces $\ker P(u)$ et $\ker Q(u)$ qui sont stables par u sont aussi monogènes d'après la question précedente. La dimension de ces sous-espaces est donc égale respectivement à $\deg \pi_v = \deg P$ et $\deg \pi_w = \deg Q$.**

  On notera que le résultat reste vrai si $P = \pi_u$, $Q = 1$ puisqu'alors $P = \pi_u = \chi_u$: $\deg P = n$ et $F = E$...

I-B-4-2

Soit F un sous-espace stable par u et $v = u_{/F}$.

Alors π_v divise π_u et $F \subset \ker \pi_v(u)$. Egalement $\deg \pi_v \leq \dim F$.

Or d'après la question précedente, $\deg \pi_v = \dim \ker \pi_v(u)$. Il vient donc : $\dim F \leq \dim \ker \pi_v(u) = \deg \pi_v \leq \dim F$ d'où l'on tire $F = \ker \pi_v(u)$.

Tout sous-espace stable par u s'écrit donc sous la forme $\ker P(u)$ où P est un diviseur de π_u. On obtient ainsi un nombre fini de sous-espaces stables par u.

Partie II

II-1-1

– **Supposons F irréductible : soit alors $x \in F$, $x \neq 0$; $E_u(x)$ est un sous-espace de F non réduit à $\{0\}$ et stable par u ; puisque F est irréductible, $E_u(x) = F$ et F est bien monogène.**

  Soit $\pi_v = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ la décomposition en produit de facteurs irréductibles de π_v. La question I-B-4-1 a montré que $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $\ker P_i^{\alpha_i}(v) \neq \{0\}$ et ces sous-espaces sont stables par u.

  On ne peut avoir $r \geq 2$ car alors, d'après le théorème de décomposition des noyaux, $F = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i^{\alpha_i}(v)$ et F serait décomposable , donc réductible.

  On peut donc écrire $\pi_v = P^\alpha$ avec P irréductible et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Comme ci-dessus $G = \ker P(v)$ est un sous-espace non réduit à $\{0\}$ et stable par u : on a $G = F$ du fait que F est irréductible, ce qui entraîne $P(v) = 0$ et donc $\pi_v = P$ et $\alpha = 1$. En conclusion π_v est bien irréductible.

– **Réciproquement soit $F = E_u(x)$ tel que $\pi_v = P$ avec P irréductible. Soit G un sous-espace de F stable par u et non réduit à $\{0\}$. Le polynôme minimal de $u_{/G}$ divise P donc est égal à P. Comme F est monogène, de même que G (cf. I-B-3) , il vient : $\dim F = \deg P = \dim G$. Finalement $G = F$ et F est bien irréductible.**

II-1-2

– **Supposons $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ avec $F_1, \dots, F_r$ irréductibles. Notons $u_i = u_{/F_i}$ et $\pi_i = \pi_{u_i}$. Soit π le produit des π_i où chaque facteur n'apparaît qu'une fois exactement.**

  π est annulateur de u : soit $x = x_1 + \cdots + x_r \in E$; $\pi(u)(x) = \sum_{i=1}^{r} \pi(u)(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \pi(u_i)(x_i) = 0$ car pour tout i, $\pi(u_i) = 0$ puisque π_i divise π. En conséquence π divise π_u et π_u a bien la forme souhaitée.

– **Réciproquement supposons $\pi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i$ avec $P_1, \dots, P_r$ irréductibles et deux à deux distincts.**

  On a par le théorème de décomposition des noyaux, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. Il suffit de

montrer que pour tout i, F_i est somme directe de sous-espaces irréductibles.

Soit $F = \ker P(u)$ l'un de ces sous-espaces. Considérons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de $\ker P(u)\backslash\{0\}$ telles que la somme $\sum_{x\in\mathcal{F}} E_u(x)$ soit directe. $\mathcal{F}$ n'est pas vide car contient tout singleton constitué par un vecteur non nul de F. Puis notons $\mathcal{C} = \{\text{card}\mathcal{A}|\mathcal{A} \in \mathcal{F}\}$. $\mathcal{C}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ majorée par $\dim F$: elle admet donc un plus grand élément que nous noterons p. Soient alors $y_1, \dots, y_p$ des éléments de F tels que la somme $\sum_{j=1}^{p} E_u(y_j)$ soit directe et $G = \bigoplus_{j=1}^{p} E_u(y_j)$.

Supposons que $G \not\subseteq F$. Soit alors $y \in F, y \notin G$:

- $E_u(y)$ est irréductible : π_y divise $\pi_{u_{/F}} = P$ donc $\pi_y = P$ et d'après II-1-1 , $E_u(y)$ est irréductible.

- $E_u(y) \cap G$ est un sous-espace de $E_u(y)$ stable par u, donc réduit à $\{0\}$ puisque $E_u(y)$ est irréductible. Ceci contredit la définition de p car alors la somme $E_u(y) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{p} E_u(y_j)\Big)$ serait directe.

En conclusion $F = \ker P(u) = \bigoplus_{j=1}^{p} E_u(y_j)$ est bien somme directe de sous-espaces irréductibles (on montre comme ci-dessus que pour tout j, $E_u(y_j)$ est irréductible).

II-2

La linéarité de $\tilde{u}$ est immédiate.

Soit $P = \sum_k a_k X^k$; on a $P(\tilde{u})(f) = \sum_k a_k \tilde{u}^k(f) = \sum_k a_k (f \circ u^k) = f \circ \sum_k a_k u^k = f \circ P(u)$

L'égalité ci-dessus montre que si $P(u) = 0$, $P(\tilde{u})(f) = 0$ pour toute $f \in E^*$, donc que $P(\tilde{u}) = 0$.

Réciproquement si $P(\tilde{u}) = 0$, on obtient : $\text{Im}P(u) \subset \bigcap_{f\in E^*} \ker f = \{0\}$ (prendre n formes linéaires indépendantes . . .). En conclusion $P(u) = 0$.

L'équivalence $P(u) = 0 \Longleftrightarrow P(\tilde{u}) = 0$ donne immédiatement $\pi_u = \pi_{\tilde{u}}$.

II-3

Soit $\mathcal{B} = (\rceil_\infty, \dots, \rceil_\backslash)$ une base de E. Notons $A = \mathcal{M}_((u);\mathcal{B}) = [\dashv_{\rangle|}]_{\rangle,|}$ et $B = \mathcal{M}_(\tilde{()}u;\mathcal{B}^*) = [\lfloor_{\rangle|}]_{\rangle,|}$.

On a : $\tilde{u}(e_j^*)(e_k) = (\sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\delta_{ik} = b_{kj} = e_j^* \circ u(e_k) = e_j^*(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\delta_{ij} = a_{jk}$

D'où $\mathcal{M}_(\tilde{()}u;\mathcal{B}^*) = {}^\sqcup\mathcal{M}_((\sqcap);\mathcal{B})$.

On retrouve ainsi que u et $\tilde{u}$ ont même polynôme minimal , puisqu'il en est ainsi pour A et ${}^tA$: il suffit de constater que pour pour polynôme P, $P({}^tA) = {}^tP(A)$ et donc $P(A) = 0 \iff P({}^tA) = 0$ . . .

II-4-1

Puisque $\pi_{\tilde{u}} = \pi_u = P^\alpha$, $P^{\alpha-1}(\tilde{u}) \neq 0$: il existe donc $g \in E^*$ tel que $P^{\alpha-1}(\tilde{u})(g) \neq 0$ . . .

II-4-2

- π_g divise $\pi_{\tilde{u}} = P^\alpha$ et $P^{\alpha-1}(\tilde{u})(g) \neq 0$: donc $\pi_g = P^\alpha$.

- π_y divise $\pi_u = P^\alpha$ et $P^{\alpha-1}(\tilde{u})(g)(y) = g \circ P^{\alpha-1}(u)(y) \neq 0$, donc $P^{\alpha-1}(u)(y) \neq 0$: d'où $\pi_y = P^\alpha$.

II-4-3

- Le fait que G est un sous-espace est immédiat (indépendamment d'ailleurs de la nature de $\mathcal{H}$).

- G est stable par u : soit $x \in G$ et $Q(\tilde{u})(g) \in \mathcal{H}$; alors $Q(\tilde{u})(g)(u(x)) = g \circ Q(u)(u(x)) = g \circ P(u)(x) = P(\tilde{u})(g)(x) = 0$ ($P = XQ$) puisque $x \in G$. Donc $u(x) \in G$.

- Par ailleurs $\dim \mathcal{H} = \deg \pi_g = \deg P^\alpha$ que nous noterons k. Soit $(f_1, \ldots, f_k)$ une base de $\mathcal{H}$. L'application qui à tout $x \in E$, associe $(f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in K^k$ a un noyau de dimension k puisque $(f_1, \ldots, f_k)$ est libre (c'est du cours ...). Il ne reste plus qu'à montrer que G est précisément le noyau de cette application , ce qui ne pose pas de problème.

II-4-4

- x sécrit sous la forme $p(u)(y)$; une division euclidienne donne $p = P^\alpha T + S$ avec $S = P^\beta Q$ où $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$ et $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$. On obtient bien $x = P^\beta Q(u)(y)$ puisque $\pi_u = P^\alpha$.

- Le théorème de Bezout donne l'existence de deux polynômes R et R_1 tels que $RQ + R_1 P = 1$. Il vient alors : $P^{\alpha-1-\beta}R(\tilde{u})(g)(x) = g \circ P^{\alpha-1-\beta}(u) \circ R(u)\big(P^\beta(u) \circ Q(u)(y)\big) = g \circ P^{\alpha-1}(u) \circ RQ(u)(y) = g \circ P^{\alpha-1}(u)\big(y - R_1 P(u)(y)\big) = g \circ P^{\alpha-1}(u)(y) \neq 0$ d'après II-4-1 et car $P^\alpha(u)(y) = 0$.

II-4-5

- Le résultat précedent a pour conséquence que pour tout $x \in F \backslash \{0\}$, $x \notin G$, puisque $R(\tilde{u})(g)(x) \neq 0$. Autrement dit $F \cap G = \{0\}$.

- Par ailleurs $\mathrm{codim}\, G = k = \deg P^\alpha = \deg \pi_u = \dim F = \dim E - \dim G$. On en déduit que $E = F \oplus G$.

**- Par récurrence sur $n = \dim E$. Supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\leq n$, ayant pour polynôme minimal une puissance d'un polynôme irréductible.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\pi_u = P^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et P irréductible.**

D'après la question précedente, on peut trouver $y \in E \backslash \{0\}$ et G un sous-espace de E stable par u tels que $\pi_y = P^\alpha$ et $E = E_u(y) \oplus G$. Si $E = E_u(y)$, c'est fini ; sinon $\pi_{u_{/G}}$ divise $\pi_u = P^\alpha$, donc $\pi_{u_{/G}} = P^\gamma$ avec $1 \leq \gamma \leq \alpha - 1$. L'hypothèse de récurrence s'applique alors à $v = u_{/G}$ et G est somme directe de sous-espaces v-monogènes, donc u-monogènes, ce qui est suffisant. Enfin la récurrence se fonde de façon triviale en $n = 1$ puisque tout espace de dimension un est monogène.

II-5

Soit $\pi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i^{\alpha_i}$ (notations claires). On a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ avec $\forall i, N_i \neq \{0\}$.

D'après I-B-4-1, $\pi_{u_{/N_i}} = P_i^{\alpha_i}$: la question précédente montre alors que pour tout i, N_i est somme directe de sous-espaces u_i-monogènes (où $u_i = u_{/N_i}$), donc u-monogènes.

II-6-1

– **supposons F indécomposable ; le même raisonnement qu'au début de la question II-1-1 montre que $\pi_v = P^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et P irréductible. D'après la question précédente, F est somme directe de sous-espaces v-monogènes, donc u-monogènes : mais comme F est indécomposable, F est lui-même monogène.**

– **Réciproquement supposons $F = E_u(x)$ et $\pi_v = P^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et P irréductible.**

  Supposons de plus $F = G \oplus H$ avec G, H stables par u et non réduit à $\{0\}$. D'après I-B-3, G et

H **sont** v**-monogènes, donc** u**-monogènes. On peut écrire** $\pi_{u_{/G}} = P^{\beta}$ **,** $\pi_{u_{/H}} = P^{\gamma}$ **avec** $0 < \beta \leq \alpha$ **et** $0 < \gamma \leq \alpha$**. L'hypothèse** $\beta = \alpha$ **conduit à** $\dim G = \deg P^{\beta} = \deg P^{\alpha} = \dim F$ **puisque** F **est monogène**
(cf. question I-B-4-1), donc à $F = G$ **ce qui n'est pas. On en déduit** $\beta < \alpha$**. De même** $\gamma < \alpha$**. Mais alors,** P^{β} **et** P^{γ} **divisant** $P^{\alpha-1}$**,** $P^{\alpha-1}$ **serait annulateur de** v **(appliquer** $P^{\alpha-1}(v)$ **à** $x = x_G + x_H$ **. . .) ce qui contredit** $\pi_v = P^{\alpha}$**. Finalement** F **est indécomposable.**

II-6-2

Reprenons les notations de la question II-5 ; pour tout i**,** N_i **est somme directe de sous-espaces monogènes** F_{ij}**. Pour tout** (i,j)**, le polynôme minimal de** $u_{/F_{ij}}$ **divise** $P_i^{\alpha_i}$**, donc est de la forme** $P_i^{\beta_{ij}}$ **avec** $0 < \beta_{ij} \leq \alpha_i$**. Ceci entraîne que tous les** F_{ij} **sont indécomposables puisque monogènes et de polynôme minimal** $P_i^{\beta_{ij}}$**, d'après la question II-6-1.**

Partie III

III-A-1-1

X^k est annulateur de u, donc π_u qui divise X^k est de la forme X^r avec $1 \leq r \leq n$. On a bien $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$ par définition de π_u.

III-A-1-2

La question II-4 a montré l'existence de $e_1 \in E$ et d'un sous-espace G stable par u (ici $P = X$ et $\alpha = r$) tels que $E = E_u(e_1) \oplus G$ et $\pi_{e_1} = X^r$. On a bien $\dim E_u(e_1) = r$ et $(e_1, u(e_1), \dots, u^{r-1}(e_1))$ est une base de $E_u(e_1)$.

III-A-1-3

Par récurrence sur $n = \dim E$.

- pour $n = 1$, le résultat est trivial.

- supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace de dimension n.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice r ($\pi_u = X^r$).

**Avec les notations de la question précédente, on a donc $E = E_u(e_1) \oplus G$.
G étant stable , $(u_{/G})^r = u^r_{/G} = 0$. Il existe donc $r_2 \leq r_1 = r$ tel que le polynôme minimal de $u_{/G}$ soit X^{r_2}. Par hypothèse de récurrence il existe une base b de G relativement à la quelle la matrice de $u_{/G}$ s'écrit sous**

la forme diagonale par blocs $\begin{pmatrix} J_2 & 0 & & \\ 0 & J_3 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & J_p \end{pmatrix}$ avec J_2 de taille r_2 etc. . . .

Relativement à la base $\mathcal{B}$ obtenue par adjonction de la base $(e_1, u(e_1), \dots, u^{r-1}(e_1))$ de $E_u(e_1)$ et de la base

b de G, la matrice s'écrit sous la forme voulue $\begin{pmatrix} J_1 & 0 & & \\ 0 & J_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & J_p \end{pmatrix}$ puisque $\mathcal{M}_((u)_{e_1}; e_1, \dots, u^{r-1}(e_1)) =$ J_1 d'après la question I-A-1-4 ($\pi_{e_1} = X^r = X^{r_1}$).

III-A-2-1

π_u divise $X^k - 1$ qui est scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples : u est donc diagonalisable. E est évidemment somme directe de sous-espaces irréductibles puisque toute droite propre est irréductible (les facteurs irréductibles de π_u sont bien sûr de mulitiplicité un).

E n'est pas nécessairement monogène : par exemple $u = -Id_E$, $u^2 = Id_E$.

III-A-2-2

π_u est un polynôme à coefficients réels qui divise $X^k - 1$: ses facteurs irréductibles, tous de multiplicité un, sont $X - 1$ ou $X + 1$ ou de la forme $X^2 + 2aX + b$ avec $a^2 - b < 0$. D'après la question II-1-2 , E est somme directe de sous-espaces irréductibles.

π_u s'écrit sous la forme $\pi_u = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta Q$ avec $\alpha = 0$ ou 1 , $\beta = 0$ ou 1 , $Q = \displaystyle\prod_i P_i$ ou 1

et $\forall i, P_i = X^2 + 2a_iX + b_i$ **,** $a_i^2 - b_i < 0$**. On obtient donc, par exemple dans le cas** $\alpha = 1$**,** $\beta = 1$**,** $Q = \prod_{i=1}^{k} P_i$**,**

$$E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)\right)$$

Si $x_i \in \ker P_i(u), x_i \neq 0$**,** π_{x_i} **divise** $\pi_{u_i} = P_i$ **(cf. question I-B-4-1) où** $u_i = u_{/\ker P_i(u)}$**. Donc** $\pi_{x_i} = P_i$ **et** $\dim E_u(x_i) = \deg P_i = 2$**. En conséquence (cf. question II-1)** $\ker P_i(u)$ **s'écrit comme somme de plans irréductibles.**

On obtient dans une base adaptée une matrice diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 & & & \\ 0 & -I_q & 0 & & \\ & 0 & \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

III-B-1-1

D'après II-2 , u **et** $\tilde{u}$ **ont même polynôme minimal. Par ailleurs puisque** E **est monogène,** $\chi_u = \pi_u$ **(question I-B-2). Enfin d'après la question II-3 ,** u **et** $\tilde{u}$ **ont même polynôme caractéristique puisque c'est le cas d'une matrice et de sa transposée : en conséquence** $\pi_{\tilde{u}} = \chi_{\tilde{u}}$ **et toujours en vertu de la question I-B-2,** E^* **est monogène. D'où l'existence de** $f \in E^*$ **telle que** $E^* = E^*{}_{\tilde{u}}(f)$**.**

III-B-1-2

Supposons $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \tilde{u}^i(e_{n-1}^*) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{n-1}^* \circ u^i = 0$**.**

En appliquant en x **ilvient :** $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{n-1}^* \circ u^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{n-1}^*(e_i) = \alpha_{n-1} = 0$**.**

Supposons $\alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_{n-k} = 0$ **pour** $k \in \{1, \ldots, n-1\}$**. Alors** $\sum_{i=0}^{n-k-1} \alpha_i e_{n-1}^* \circ u^i(u^k(x)) = \sum_{i=0}^{n-k-1} \alpha_i e_{n-1}^*(e_{i+k})$
$= \alpha_{n-k-1} = 0$**. On obtient donc par récurrence :** $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\},\ \alpha_i = 0$**.**

III-B-1-3

On sait (question II-3) que $\mathcal{M}_(\tilde{()}u; \mathcal{B}^*) = {}^{\sqcup}\mathcal{M}_((\sqcap); \mathcal{B})$**.**

Par ailleurs $\mathcal{M}_(\tilde{()}u; b)$ **où** $b = (e_{n-1}^*, \tilde{u}(e_{n-1}^*), \ldots, \tilde{u}^{n-1}(e_{n-1}^*))$ **est égale à** $\mathcal{M}_((u); \mathcal{B})$ **car** $\pi_{\tilde{u}} = \pi_{e_{n-1}^*} = \pi_u = \pi_x$ **(cf. question I-A-1-4 : ces matrices sont entièrement déterminées par le polynôme minimal).**

Comme les matrices $\mathcal{M}_(\tilde{()}u; \mathcal{B}^*)$ **et** $\mathcal{M}_(\tilde{()}u; b)$ **sont semblables, il en est de même des matrices** ${}^t\mathcal{M}_((u); \mathcal{B})$ **et** $\mathcal{M}_((u); \mathcal{B})$**.**

Remarque : la question B-1-3 se traite de la même manière avec $f \in E^*$ **(non déterminée explicitement) comme au B-1-1 et** $b = (f, \tilde{u}(f), \ldots, \tilde{u}^{n-1}(f))$ **...**

III-B-2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **et** $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ **associé à** A **via la base canonique de** $\mathbb{K}^n$**.** K^n **est somme directe**

de sous-espaces monogènes d'après la question II-5 : $K^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{M}_\rangle$**. Notons** $\mathcal{M}_\rangle = \mathcal{E}_\sqcap(\S_\rangle)$ **et** $\mathcal{B}_\rangle = (\S_\rangle, \sqcap(\S_\rangle), \ldots, \sqcap^{\lceil_\rangle - \infty}(\S_\rangle))$

où $d_i = \dim \mathcal{M}_\rangle$ **et** $u_i = u_{/\mathcal{M}_\rangle}$**.**

D'après la question précèdente, pour tout i**,** ${}^t\mathcal{M}_((u)_i, \mathcal{B}_\rangle)$ **est semblable à** $\mathcal{M}_((u)_i, \mathcal{B}_\rangle)$**.**

Soit $\mathcal{B}$ **la base de** K^n **obtenue par adjonction des bases** $\mathcal{B}_\infty, \ldots, \mathcal{B}_\|$**, que l'on peut noter** $\mathcal{B} = \bigoplus_{\rangle=\infty}^{\|} \mathcal{B}_\rangle$ **:**

il est immédiat de vérifier que ${}^t\mathcal{M}_((u); \mathcal{B})$ **est semblable à** $\mathcal{M}_((u); \mathcal{B})$**, ces matrices étant "transposées par blocs", puis "semblables par blocs ".**

Enfin $\mathcal{M}_((u); \mathcal{B})$ **est semblable à** A **et** ${}^t\mathcal{M}_((u); \mathcal{B})$ **est semblable à** ${}^tA$**. Finalement** A **et** ${}^tA$ **sont semblables.**

Fin
à la prochaine