CONCOURS NATIONAL - MAROC - 1996
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT
Epreuve d'algèbre

Algèbres de dimension 2

NOTATIONS ET DEFINITIONS :

Le corps des réels est noté **R** , le corps des complexes est noté **C** .

Le **R**-espace vectoriel des matrices 2 lignes, 2 colonnes,à coefficients réels, est noté $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Ce **R**-espace vectoriel est muni d'une structure d'algèbre dont l'élément unité est la matrice $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Le **R**-espace vectoriel des vecteurs colonne de 2 éléments réels sera noté $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

On note $\varepsilon_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\varepsilon_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

A toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ on associe l'endomorphisme Φ_M : $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, $V \mapsto MV$.

Pour une matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,où $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}$, on notera $\hat{M}$ la matrice $\hat{M} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$;

on notera tr $(M) = a + d$ la trace, et det $(M) = ad-bc$ le déterminant, de la matrice M.

On notera $\mathrm{C}(M)$ l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qui commutent avec M ,*i.e.* telles que $MN = NM$.

Seuls les résultats des questions **6** et **7** de la partie **I** sont utilisés dans la partie **II**.

Les résultats de la partie **II** ne sont pas utilisés dans la partie **III** .

Seul le résultat de la question **3**) de la partie **I** est utilisé dans la partie **III** .

Dans la partie **IV** sont utilisés les résultats de la partie **II** , les notations générales de la partie **III ,** ainsi que la question **1** de cette partie.

I

I-1. Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $\hat{M} = M$?

I-2 . Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, exprimer $M + \hat{M}, M\hat{M}, \hat{M}M$ en fonction de tr (M) et de det(M) .

I-3 . Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,on a l'égalité :

$$M^2 - \mathrm{tr}\,(M)\,M + \det\,(M)\,\mathrm{I}_2 = 0.$$

I-4 .

I-4-1. Montrer que la matrice de Φ_M dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ est M.

I-4-2. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, Φ_M et $\Phi_{\hat{M}}$ ont même polynôme caractéristique.

I-5. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ commute avec M si et seulement si elle commute avec $\hat{M}$.

I-6. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $M \neq \hat{M}$.

I-6.1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{C}(M)$ est le sous-**R** -espace vectoriel engendré par I_2 et M.

I-6.2. Montrer que le sous-**R** -espace vectoriel $\mathrm{C}(M)$ est une sous-**R**-algèbre commutative de $\mathcal{M}_2(\mathrm{R})$.

I-7. Déduire de la question précédente que deux matrices M et N éléments de $\mathcal{M}_2(\mathrm{R})$ commutent si , et seulement si , la famille $(\mathrm{I}_2, M, \mathrm{N})$ est liée .

I-8. On suppose $M \neq \hat{M}$. Soit λ une valeur propre de Φ_M , montrer que les colonnes de $\hat{M} - \lambda\,\mathrm{I}_2$ sont dans l'espace propre relatif à la valeur propre λ de l'endomorphisme Φ_M ,et que l'une des ces colonnes n'est pas nulle.

I-9. On suppose $M \neq \hat{M}$.

I-9-1. Montrer que la sous-**R** -algèbre C(M) est un corps si et seulement si l'endomorphisme Φ_M n'a pas de valeurs propres réelles .

I-9-2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le déterminant de M et la trace de M , pour que la sous-**R** -algèbre C(M) soit un corps .

I-10. On suppose $M \neq \hat{M}$ et que C(M) est un corps. Soit α un zéro complexe du polynôme caractéristique de Φ_M .

I-10-1. Justifier que α n'est pas réel , et qu'il existe une et une seule application-**R** -linéaire f : C $\rightarrow$ C(M) telle que $f(1) = I_2$ et $f(\alpha) = M$.

I-10-2. Montrer que f est un isomorphisme de corps .

II

On considère dans cette partie une application L : $\mathtt{M}_{2,1}$**(R)** x $\mathtt{M}_{2,1}$**(R)** $\rightarrow$ $\mathtt{M}_{2,1}$**(R)** , qui est bilinéaire . Cette application L sera considérée comme une loi de composition interne sur $\mathtt{M}_{2,1}$**(R)** .

II-1.

II-1-1. Montrer qu'il existe des éléments A,B,C,D de $\mathtt{M}_{2,1}$**(R)** uniques , tels que pour tout vecteur colonne $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ et $V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ éléments de $\mathtt{M}_{2,1}$**(R) ,** on ait l'égalité :

$$L\,(V_1\,,V_2) = x_1\,x_2\,A + x_1\,y_2\,B + x_2\,y_1\,C + y_1\,y_2\,D\,.$$

Exprimer les vecteurs colonne A,B,C,D en fonction des valeurs de l'application L sur les couples de vecteurs de la base canonique de $\mathtt{M}_{2,1}$**(R)** .

II-1-2. On note M la matrice élément de $\mathtt{M}_2$**(R)** dont les colonnes sont A , B et N la matrice dont les colonnes sont C, D .

Montrer que pour tous les vecteurs colonne $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ et $V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ éléments de $\mathtt{M}_{2,1}$**(R) ,** on a l'égalité : $L\,(V_1\,,V_2) = (x_1 M + y_1\,N)\,V_2$.

(On pourra utiliser le fait que si Q est une matrice élément de $\mathtt{M}_2$**(R)** , les colonnes de Q sont $Q\varepsilon_1$ et $Q\varepsilon_2$).

II-2. On reprend les notations de la question précédente, et pour tout $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ élément de $\mathtt{M}_{2,1}$**(R)** $\varphi(V)$ la matrice $x\,M + y\,N$ élément de $\mathtt{M}_2$**(R)** .

D'après la question précédente, on a , pour tous vecteurs colonne V et W éléments de $\mathtt{M}_{2,1}$**(R) ,** l'égalité : $L(V, W) = \varphi(V)\,W$.

II-2-1. Montrer que l'application bilinéaire L est symétrique (i.e. la loi de composition L est commutative) si et seulement si $B = C$.

II-2-2. On suppose que la loi L est commutative. Montrer que la loi L a un élément neutre si , et seulement si , I_2 est dans le sous-**R** -espace vectoriel engendré par les matrices M et N dans $\mathtt{M}_2$**(R)** .

II-2-3. Montrer que la loi L est associative si et seulement si pour tout vecteur colonne V et W éléments de $\mathtt{M}_{2,1}$**(R)** on a l'égalité $\varphi(L(V, W)) = \varphi(V)\,\varphi(W)$.

II-2-4. On suppose que la loi L est commutative . Montrer que la loi L est associative si et seulement si pour tous vecteurs colonne V_1 , V_2 , V_3, on a l'égalité : $L\,(V_3\,, L\,(V_1\,, V_2)) = L\,(V_1\,, L\,(V_3\,, V_2))$.

II-2-5. On suppose que la loi L est commutative ; utiliser le **II-2-4.** pour montrer que la loi L est associative si et seulement si les matrices M et N commutent .

II-3. On reprend les notations des questions précédentes. On suppose que la loi L est commutative , que les matrices M et N commutent , et que la famille (M, N) est libre.

II-3-1. Montrer que l'application φ est injective.

II-3-2. Montrer que l'image de φ contient I_2 .

II-3-3. Montrer qu'il existe dans $\operatorname{Im}\varphi$ des éléments non colinéaires à I_2 , et que si M_0 est l'un d'eux, $\operatorname{Im}\varphi = C\,(M_0)$.

II-3-4. Montrer que la loi L munit $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ d'une structure d'algèbre associative commutative et unitaire, et que φ est un homomorphisme injectif d'algèbres.

III

Soient P et Q deux matrices éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, de trace nulle, telle que la deuxième colonne de P soit identique à la première colonne de Q .

On posera : $P = \begin{bmatrix} c & -b \\ d & -c \end{bmatrix}$ et $Q = \begin{bmatrix} -b & a \\ -c & b \end{bmatrix}$, où a, b , c d sont des réels.

On ne suppose pas que les matrices P et Q commutent.

On note ψ l'application $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, qui , au vecteur colonne $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, fait correspondre la matrice $\psi(V) = xP + yQ$.

On introduit l'application bilinéaire $\theta : (\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}))^2 \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$,telle que pour tout couple (V_1 , V_2) d'éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathrm{R})$, $\theta(V_1 , V_2) = \psi(V_1)\, V_2$.

L'application θ est aussi une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$; cette loi est commutative d'après **II.1** et **II.2.**

III-1.

III-1-1. Montrer que l'application $V \mapsto -\det(\psi(V))$ est une forme quadratique sur le **R**-espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$; cette forme quadratique sera notée q .

III-1-2. Donner en fonction des réels a , b, c, d l'expression analytique de la forme quadratique q dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

III-1-3. Montrer que pour tout $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on a l'égalité $(\psi(V))^2 = q(V)\, I_2$.

(On pourra remarquer que les matrices $\psi(V)$ sont de trace nulle et utiliser la question **I 3**).

III-1-4. Montrer que la forme quadratique q est nulle si et seulement si les triplets (b ,c, d) et (a , b, c) de réels sont linéairement dépendants.

III-1-5. Déduire du **III-1-4.** que la forme quadratique q est nulle si et seulement si les matrices P et Q sont liées.

III-2. Soit B la forme polaire de la forme quadratique q. Montrer que pour tous V_1, V_2 éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on a l'égalité : $\psi(V_1)\,\psi(V_2) + \psi(V_2)\,\psi(V_1) = 2\,B(V_1 , V_2)\, I_2$.

(On pourra utiliser le résultat de la question **III-1-3.**) .

III-3.

III-3-1. Calculer les matrices PQ et QP .

III-3-2. Montrer que pour tout $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on a les égalités :

$$q(V) = \det(V , PQV) = -\det(V, QPV) ,$$

le déterminant étant relatif à la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.

III-3-3. Montrer que pour tout $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ la matrice $\psi(V)$ est la matrice dont les colonnes sont PV et QV ; en déduire l'égalité : $q(V) = \det(QV , PV)$.

III-3-4. Montrer que pour tous réels x et y , on a l'égalité :

$$PQ\,(xP + yQ) = (xP + yQ)\, QP.$$

On pourra remarquer que la matrice Q est de trace nulle et utiliser la question **I-3).**

III-3-5. Déduire de **III-3-2.** , **III-3-3.** et **III-3-4.** que pour tous V et W éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ on a les égalités :

$$q(\psi(V)W) = q(\theta(V,W)) = q(V)\, q(W).$$

(On pourra utiliser , après l'avoir justifié , l'égalité det (RV, RW)= det (R)det (V,W) , où R est une matrice élément de M_2 (**R**) , et V , W des éléments de $\mathrm{M}_{2,1}$ (**R**).

IV

On reprend les hypothèses et notations de la partie **III**.
On suppose de plus que V_0 est un élément de $\mathrm{M}_{2,1}$ (**R**) tel que $\psi (V_0)$ soit inversible, ce qui équivaut à la condition $q(V_0) \neq 0$.

On introduit l'application $\Theta : (\mathrm{M}_{2,1}(\mathbf{R}))^2 \to \mathrm{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, telle que , pour tout couple (V_1 , V_2) d'éléments de $\mathrm{M}_{2,1}$ (**R**) : $\Theta (V_1 , V_2)= \theta (V_0 , \theta (V_1 , V_2) = \psi (V_0) \psi (V_1) V_2$.

Cette application Θ est aussi considérée comme une loi de composition interne sur $\mathrm{M}_{2,1}$ (**R**).

IV-1.

IV-1-1. Montrer que l'application Θ est bilinéaire .

IV-1-2. Quels sont les vecteurs colonne A, B , C , D éléments de $\mathrm{M}_{2,1}$ (**R**) associées à l'application bilinéaire Θ par le procédé décrit dans la question **1**du **II** ?

IV-1-3. Quelles sont les matrices M et N associées à l'application bilinéaire Θ ?

IV-1-4. On pose comme dans la partie **II**, $\varphi (V)= x M+ yN$ pour tout vecteur colonne $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ élément de $\mathrm{M}_{2,1}$ (**R**).

Montrer qu'on a l'égalité : $\varphi (V) = \psi (V_0) \psi (V)$.

IV-1-5. Montrer que la loi de composition Θ est commutative.

IV-2. Montrer que la loi de composition Θ est associative .

IV-3. Montrer qu'il y a dans $\mathrm{M}_{2,1}$ (**R**) un élément neutre pour la loi Θ .
Exprimer cet élément neutre en fonction de V_0 .

Le **R**-espace vectoriel $\mathrm{M}_{2,1}$ (**R**) muni de la loi Θ est donc une algèbre associative unitaire et commutative.

IV-4. Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{M}_{2,1}(\mathbf{R}) \to \mathrm{M}_2(\mathbf{R})$, $V \mapsto \psi (V_0) \psi (V)$ est un homomorphisme d'algèbres .

IV-5. Montrer que les éléments inversibles pour la loi Θ sont les vecteurs colonne $V \in \mathrm{M}_{2,1}$ (**R**) tels que $q (V) \neq 0$. Quel est l'inverse d'un élément inversible V ?