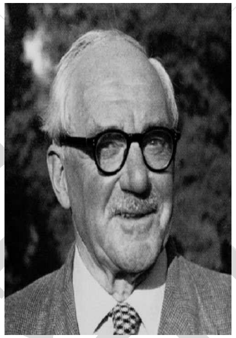
Devoir Surveillé

5 Fonctions holomorphes : Série de Fourier lacunaire quadratique

Blague du jour

☛ Comment appelle t-on un chien sans pattes ? On ne l'appelle pas, on va le chercher !
☛ Un vieux rat rencontre une petite taupe. Curieux, il lui demande :
- Que veux-tu faire plus tard, ma petite ?
- Taupe-modèle !!



John Edensor Littlewood (1885-1977)

Mathématicien anglais. Il a surtout travaillé en analyse sur le sujet des fonctions entières. Il a collaboré pendant de nombreuses années avec Hardy et ils ont formulé ensemble deux conjectures. Il a aussi travaillé sur la théorie de Fourier. Il est lauréat de la Médaille Sylvester, de la Royal Medal et de la médaille Copley en 1958.

Mathématicien du jour

Énoncé : CNC MP, 2011

La fonction q définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\pi n^2 x}}{i\pi n^2}$$

est étudie par Riemann il y a environ 150 ans, avec l'idée que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable. L'étude est poursuivie par Hardy qui prouve en 1916 que cette fonction est non dérivable en tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{\mathbb{Q}\}$. Il reste à étudier la dérivabilité en x rationnel et c'est Gerver qui en 1970 réussit à trouver le résultat assez inattendu : la fonction est dérivable en tout $x \in \mathbb{Q}$. Depuis, d'autres propriétés de cette fonction ont été étudiées, propriétés qui analysent plus finement la régularité de cette fonction : en particulier son ordre de Holder local et son spectre multifractal.

Le sujet a pour objet d'établir la dérivabilité de la fonction q au point 1 ; il utilise des outils de l'analyse complexe.
Le problème est composé de cinq parties ; les deux premières parties ont pour objectif d'établir la formule (2) qui sera utile dans la cinquième partie. Les trois dernières parties du problème s'enchaînent entre elles.

1ère partie : Formule sommatoire de Poisson

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que les applications $t \longmapsto t^2 g(t)$ et $t \longmapsto t^2 g'(t)$, définies sur $\mathbb{R}$, soient bornées à l'infini, ce qui revient à dire que

$$g(t) \underset{t \longrightarrow \pm +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ et } g'(t) \underset{t \longrightarrow \pm +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On lui associe la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies par

$$g_0(t) = g(t), \quad g_n(t) = g(t+2n\pi) + g(t-2n\pi) \quad t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*$$

① Montrer que pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto g(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par définition, la transformée de Fourier de g est la fonction notée $\widehat{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\widehat{g}(x) = \int_{-+\infty}^{++\infty} g(t)e^{-ixt}dt, \quad x\in\mathbb{R}.$$

② Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} g_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

③ On note $\widetilde{g}$ la fonction définie, pour tout $t\in\mathbb{R}$, par $\widetilde{g}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$.

① Montrer que la fonction $\widetilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

② Justifier que la fonction $\widetilde{g}$ est 2π-périodique et que ses coefficients de Fourier complexes sont donnés par

$$c_k(\widetilde{g}) = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(k), \quad k\in\mathbb{Z}$$

On remarquera que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\widetilde{g}(t) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{p=-n}^{p=n} g(t+2p\pi)$.

③ Montrer que les familles $(g(2n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\widehat{g}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables et que leurs sommes vérifient la relation suivante, dite formule sommatoire de Poisson,

$$2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{g}(n).$$

2ème partie : Application de la formule sommatoire de Poisson

Pour tout réel $\alpha>0$, on note h_α la fonction définie, pour tout $t\in\mathbb{R}$, par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha^2t^2}$.

① Vérifier que, pour tout réel $\alpha>0$, la fonction h_α satisfait les hypothèses faites sur la fonction g dans la partie précédente.
Dans la suite, on notera $\widehat{h_\alpha}$ la transformée de Fourier de h_α, $\alpha>0$; on admettra que $\widehat{h_1}(0) = \sqrt{\pi}$.

② Montrer que la fonction $\widehat{h_1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}y = 0 \qquad (1)$$

③ Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\widehat{h_1}$.

④ Montrer, pour tout $\alpha>$ et tout réel x, $\widehat{h_\alpha}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{\frac{-x^2}{4\alpha^2}}$.

⑤ Montrer, pour tout réel $a>0$, la relation

$$\sqrt{a}\left(1+2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2 a}\right) = 1+2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{\frac{-\pi n^2}{a}}. \qquad (2)$$

3ème partie : Un résultat général sur les fonctions holomorphes

Si a et b sont des nombres complexes, $\gamma_{a,b}$ désigne le chemin du plan complexe $\mathbb{C}$ défini, pour tout $t\in[0,1]$, par $\gamma_{a,b}(t) = (1-t)a+tb$; son image $\gamma_{a,b}[0,1]) = \{(1-t)a+tb,\ 0\le t\le 1\}$ est notée $[a,b]$; c'est le segment du complexe d'extrémités a et b.
Pour la suite du problème, on notera Ω la partie de $\mathbb{C}$ définie par

$$\Omega = \{z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z)>0\}$$

① Vérifier que pour tout $(a,b) \in \Omega^2$, $[a,b] \subset \Omega$, puis justifier que Ω est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue, si $(a,b) \in \Omega^2$, on définit l'intégarle curviligne de f le long du chemin $\gamma_{a,b}$, notée $\int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz$ ou simplement $\Phi(a,b)$, par

$$\Phi(a,b) = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz := (b-a)\int_0^1 f((1-t)a+tb)dt.$$

② Soit a fixé dans Ω; montrer que l'application $\Phi_a : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $b \longmapsto \Phi_a(b) = \Phi(a,b)$, est continue sur Ω.

③ Soit ψ la fonction définie, pour tout $z \in \Omega$, par $\psi(z) = \bar{z}$; soient a et b deux éléments distincts de Ω. Montrer que l'ensemble des $c \in \Omega$ tels que

$$\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz$$

est soit une droite soit une demi-droite du plan complexe à préciser.

④ Dans la suite de cette partie, f est supposée holomorphe sur Ω. Si x et y sont des réels tels que $x+iy \in \Omega$, on pose

$$P(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy)), \quad Q(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy)).$$

① Rappeler les relations reliant les dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ puis $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

② Soit $(a,b,c) \in \Omega^3$. Montrer à l'aide des résultats du programme sur les formes différentielles que $\int_{\partial T^+} Pdx - Qdy = \int_{\partial T^+} Qdx + Pdy$, où ∂T^+ désigne la frontière, orientée dans le sens direct, de la plaque triangulaire T du plan $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont les affixes des complexes a, b et c. En déduire $\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz$.

③ Soit $a \in \Omega$ fixé; déduire de ce qui précède que la fonction Φ_a est holomorphe sur Ω et que sa dérivée au sens complexe, noté Φ'_a, vérifie $\Phi'_a(b) = f(b)$ pour tout $b \in \Omega$; on rappelle que

$$\Phi'_a(b) = \lim_{\substack{c \longrightarrow b \\ c \in \Omega\setminus\{b\}}} \frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c-b}$$

④ On suppose que, pour tout $b \in \Omega$, la fonction $r \longmapsto \Phi(ir,b)$, définie sur $]0,++\infty[$, admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque r tend vers 0^+; on note $F(b)$ cette limite. Montrer que, pour tout $(b,c) \in \Omega^2$, $F(c) - F(b) = \Phi(b,c)$, puis en déduire que F est holomorphe sur Ω et que $F' = f$ sur Ω.

$4^{\text{ème}}$ partie : Étude d'un exemple

On note exp la fonction exponentielle complexe. Si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, on note $Arg(z)$ l'élément de l'intervalle $]-\pi,\pi[$ tel que $z = |z|\exp(iArg(z))$; on pose alors $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + iArg(z)$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$z^\lambda = \exp(\lambda \mathrm{Log}(z))$$

La fonction Log est le logarithme principal défini sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$; on rappelle que les fonctions exp et Log sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et

$\mathbb{C}\backslash R^-$ respectivement; leur dérivées au sens complexes vérifiant

$$\text{Log}'(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^- \quad \text{et} \quad \exp'(z) = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Soit λ un réel fixé dans l'intervalle $]-1,0[$; on note f_λ la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, par

$$f_\lambda(z) = z^\lambda \exp(-\frac{i}{z}).$$

① Justifier que f_λ est holomorphe sur Ω.

② Soit b un complexe fixé dans Ω. On note $J_{\lambda,b}$ la fonction, définie pour tout $r > 0$, par $J_{\lambda,b}(r) = \int_{\gamma_{ir,b}} f_\lambda(z)dz$. Montrer que la fonction $J_{\lambda,b}$ admet une limite, notée $F_{\lambda,b}$, lorsque r tend vers 0^+ et que

$$F_\lambda(b) = b^{\lambda+1}\int_{]0,1]} t^\lambda \exp(-i\,tb)dt.$$

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée après en avoir vérifié les conditions de validité.

③ On note G_λ la fonction, définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $G_\lambda(z) = z^{-\lambda-2}\exp\left(\frac{i}{z}\right)F_\lambda(z)$.

① Justifier que les fonctions F_λ et G_λ sont holomorphes sur Ω et que $F_\lambda' = f_\lambda$ sur Ω.

② Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $G_\lambda(z) = \frac{1}{z}\exp\left(\frac{i}{z}\right)\int_1^{++\infty} u^{-\lambda-2}\exp\left(-\frac{iu}{z}\right)du.$

③ Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $|G_\lambda(z)| \leq 2$ et que $|F_{-1/2}(z)| \leq 2|z|^{\frac{3}{2}}$.

5$^{\text{ème}}$ partie : Démonstration de la propriété proposée

Pour tout entier naturel non nul n, on note u_n la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par

$$u_n(z) = \exp(i\pi n^2 z).$$

① Soit $z \in \mathbb{C}$; montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ converge $\iff z \in \Omega$.

Dans la suite, on pose $u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$, $z \in \Omega$.

② Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $u(z+1) + u(z) = 2u(4z)$.

③ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,++\infty[$, on pose

$$\widetilde{u}_n(x,y) = u_n(x+iy) \quad \text{et} \quad \widetilde{u}(x,y) = u(x+iy)$$

① Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} n^k\widetilde{u}_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}\times]0,++\infty[$ pour tout $a > 0$.

② Montrer soigneusement que la fonction $\widetilde{u}$, définie ci-dessus, possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,++\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x et exprimer $\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}(x,y)$, pour $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,++\infty[$, sous la forme de la somme d'une série.

③ Montrer de même que la fonction $\widetilde{u}$ possède en tout point de $\mathbb{R}\times]0,++\infty[$ une dérivée partielle par rapport à y et l'exprimer en fonction de $\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x}(x,y)$.

④ Montrer que la fonction u est holomorphe sur Ω.

④ Partant de la formule (2) de la deuxième partie et moyennant un résultat sur les zéros d'une fonction holomorphe, montrer que pour tout $z \in \Omega$,

$$\left(\frac{i}{z}\right)^{1/2}(1+2u(z)) = 1+2u\left(-\frac{1}{z}\right).$$

⑤ En déduire que, pour tout $z \in \Omega$, $u(1+z)+\frac{1}{2} = \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\exp(\frac{-i\pi n^2}{4z}) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right)\right)$.

⑥ Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{u_n}{i\pi n^2}$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ et que sa somme, notée v, est continue sur cette ensemble.

⑦ Montrer que, pour tout $z \in \Omega$ et tout $\alpha > 0$, la série $\sum_{n\geq 1} nF_{-1/2}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right)$ est convergente, où $F_{-1/2}$ est la fonction définie dans la quatrième partie.

⑧ Pour tout $z \in \Omega$, on pose

$$v_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n(z)}{i\pi n^2} \quad et \quad w(z) = \frac{(i\pi)^{1/2}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(nF_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-1/}\right.$$

① Montrer que la fonction v_1 est holomorphe sur Ω et que $v_1' = u$.

② On admet que la fonction w est holomorphe sur Ω; calculer sa dérivée w', au sens complexe, en admettant que l'on puisse dériver terme à terme la série définissant w.

③ Montrer que, pour tout $z \in \Omega$,

$$v_1(z+1) - v(1) = \frac{-z}{2} + \frac{(i\pi)^{1/2}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(nF_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-1/2}\right.$$

⑨ Montrer qu'il existe une constante c positive telle que, pour tout $z \in \Omega$, on ait

$$\left|v(z+1) - v(1) + \frac{z}{2}\right| \leq c|z|^{3/2}.$$

⑩ Montrer soigneusement que $q(x+1) - q(1) + \frac{x}{2} \underset{x\longrightarrow 0}{=} O(x^{3/2})$. En déduire que la fonction q est dérivable en 1 et préciser $q'(1)$.

Fin Fin

Á la prochaine