Devoir Libre

16 Équations de Bessel et la fonction Gamma

Blague du jour

C'est un prof,pensant au glaçon qui passe à l'état de vapeu, demande à ses élèves de prépas si tout le monde a bien compris ce que c'est que la sublimation.
« Est-ce que vous pouvez me donner un exemple de solide qui se transforme en gaz sans passer par l'état liquide ? »
Et du fond de la classe quelqu'un lance : « Les cigarettes m'sieur ! »

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué en 1838 les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation. Bessel est le premier à déterminer avec succès la parallaxe, et par là même la distance d'une étoile fixe. il émit, le premier, l'hypothèse que les queues de comètes pouvaient être dues à une force répulsive et l'existence d'une grande planète au-delà d'Uranus.

Mathématicien du jour

Énoncé : CNC 2007, MP

Définitions Pour tout le problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1+\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0. \qquad (F_\lambda)$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

La partie I du problème est largement indépendante des autres.

PARTIE I

① Soit x un réel.

① Étudier, selon les valeurs de x, l'intégrabilité sur l'intervalle $]0,1]$ de la fonction
$$t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

② Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

② À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$?

③ On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad z\in\mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(z)>0$.

① Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z)>0$; montrer que
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

② En déduire, pour tout réel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité
$\Gamma(\alpha+p+1) = (\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$.

③ Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

④ Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

④ ① Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

② Montrer que la fonction $z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$ est définie sur la partie $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$ du plan complexe et qu'elle y est continue.

La formule précédente permet de prolonger la fonction Γ *à* $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.

⑤ Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

① Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t.

② Montrer que

$$\forall x \in [a,b], \quad 0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

③ En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

④ Donner un équivalent de la fonction Γ au voisinage de 0.

PARTIE II

Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in]0, R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

① On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0 \neq 0$. Montrer que
$\alpha^2 = \lambda^2$, $\quad ((\alpha+1)^2 - \lambda^2)a_1 = 0$, $\quad$ et $\quad \forall n \geq 2$, $((\alpha+n)^2 - \lambda^2)a_n = a_{n-}$

② On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$.

① Montrer que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0\Gamma(\alpha+1)}{2^{2p}p!\Gamma(\alpha+p+1)}.$$

② Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

③ Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$ alors

$$\forall\, x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda},$$

puis donner un équivalent de la fonction y_λ au voisinage de 0.

③ On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)$ par $\dfrac{\Gamma(\alpha+p+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$ si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\dots\}$.

① En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(-\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

② Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

PARTIE III

Dans cette partie, on va construire, dans les cas $\lambda = 0$ ou 1, une solution z_λ de l'équation différentielle (F_λ), définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui soit linéairement indépendante de la solution y_λ.

A- Étude de (F_0)

On rappelle que

$$\forall\, x > 0, \quad y_0(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^p p!)^2} x^{2p}.$$

Soit $\alpha > -1$; on définit la suite $\left(a_{2p}(\alpha)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $a_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$a_{2p}(\alpha)(\alpha+2p)^2 = a_{2(p-1)}(\alpha), \ p \geq 1 \qquad (1).$$

① ① Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2}.$$

② On voit bien que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les fonctions a_{2p} sont dérivables en 0 ; on pose alors

$$b_p = \frac{da_{2p}}{d\alpha}(0) = a'_{2p}(0) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$b_p = -\frac{1}{(2^p p!)^2} H_p.$$

③ Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{p\geq 1} b_p z^{2p}$.

② ① En utilisant la relation (1), montrer que , pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$(2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) = b_{p-1},$$

avec la convention $b_0 = 0$.

② En déduire que la fonction $z_0 : x \longmapsto y_0(x)\ln x + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} b_p x^{2p}$ est une solution de l'équation différentielle (F_0) , définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

③ Vérifier que la famille (y_0, z_0), d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_0).

B- Étude de (F_1)

On rappelle que

$$\forall\, x > 0, \quad y_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!(p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}.$$

Soit $\alpha \in]0, 2[$; on définit la suite $\left(c_{2p}(\alpha)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $c_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$c_{2p}(\alpha)\left((\alpha+2p)^2 - 1\right) = c_{2(p-1)}(\alpha), \ p \geq 1 \qquad (2).$$

① ① Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}.$$

② On voit là aussi que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les fonctions c_{2p} sont dérivables en 1 ; on pose alors

$$d_p = \frac{dc_{2p}}{d\alpha}(1) = c'_{2p}(1) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$d_p = -\frac{1}{2^{2p+1} p!(p+1)!}(H_p + H_{p+1} - 1).$$

③ Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{p \geq 1} d_p z^{2p}$.

② ① En utilisant la relation (2), montrer que , pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$\left((1+2p)^2 - 1\right) d_p + 2(1+2p) c_{2p}(1) = d_{p-1},$$

avec la convention $d_0 = 0$.

② En déduire que la fonction $u_1 : x \longmapsto 2y_1(x)\ln x + \sum\limits_{p=1}^{+\infty} d_p x^{2p+1}$ est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)y = \frac{2}{x}, \qquad (E_1)$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

③ ① Montrer que l'équation différentielle (E_1) possède une solution v_1, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est de la forme $v_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e_n x^{n-1}$.

② Vérifier que la fonction $z_1 = v_1 - u_1$ est une solution de l'équation différentielle (F_1), définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

④ Vérifier que la famille (y_1, z_1), d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_1).

Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com