Corrigé : Pr. Taibi, CPGE Rabat, Maroc

Partie I

1. L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ pour tout réel x .
   a. On a : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$, donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement $1-x<1$ soit $x>0$.
   b. On a aussi $t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
2. L'applicationn $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(z-1)\ln(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et que pour tout $t>0$, $\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1}$, donc par la question 1°), l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\Re(z)>0$.
3. Quelques formules utiles :
   a. Les applications $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classes C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $z \in C$ tel que $\Re(z)>0$, on a : $\left|e^{-t}t^z\right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1} \underset{t\mapsto+\infty}{\to} 0$. On applique alors une intégration par parties à l'intégrale $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-z-1}dt$:
   $$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-z-1}dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_{t=0}^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z) \text{ pour tout } z \text{ tel que } \Re(z)>0$$
   b. Pour tout $z \in C$ tel que $\Re(z)>0$ et tout $p \in N^*$, on a : $\Gamma(z+p) = \Gamma((z+p-1)+1) = (z-p-1)\Gamma(z-p-1)$.
   D'où : $\prod_{k=1}^{p}\Gamma(z+k) = \prod_{k=1}^{p}(z-k-1)\Gamma(z-k-1) = \prod_{k=1}^{p-1}(z-k)\prod_{k=1}^{p-1}\Gamma(z-k)$ et par suite :
   $$\Gamma(z+p) = \prod_{k=1}^{p-1}(z-k)\Gamma(z)$$
   On prend $z=\alpha+1$, on a : $\Re(z) = \Re(\alpha+1) = \Re(\alpha)+1>0$ et par suite
   $$\Gamma(\alpha+1+p) = \gamma(\alpha+1)\prod_{k=1}^{p-1}(\alpha+1+k) = \Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)...(\alpha+p$$
   c. Pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive, donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt > 0$.
   d. Par un simple calcul, on a $\Gamma(1)=1$ et par $b)$ pour $\alpha=0$, $p=n$, on a ::
   $$\Gamma(n+1) = \prod_{k=1}^{n}k = n!$$
4. Développement en série de Γ.
   a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z)>0$, on a : $\Gamma(z) =$

$\int_{]0,1[} t^{z-1}e^{-t}dt + \int_{[1,+\infty[} t^{x-1}e^{-t}dt$

Ecrivons $e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}t^n$, on a alors : $t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}$

Si l'on pose $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}$ pour $t \in]0,1]$, on a : f_n est intégrable sur $]0,1]$ pour tout entier naturel n et que $\int_{]0,1]} |f_n(t)|\,dt \leqslant \int_{]0,1]} \frac{1}{n!}dt = \frac{1}{n!}$ et puisque la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, il en résulte par le théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{z+n-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

b. Posons $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ (fraction rationnelle en z)
pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|f_n(z)| = \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+z|} \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+\Re(z)|}$ car $|n+\Re(z)| \leqslant |n+z|$, donc $\sum f_n(z)$ converge absolument et par suite $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.
Soit K un compact inclu dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, et $\alpha = d(Z^-, K)$, on a $\alpha > 0$ car $\mathbb{Z}^-$ fermé et K compact. On a alors pour tout $z \in K$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $|n+z| = d(-n,z) \geqslant \alpha$, donc $|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+z|} \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{\alpha}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, il en résulte que $\sum f_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, donc par le théorème de continuité la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

On peut aussi montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ en effet : Comme $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ est un ouvert, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, il existe $r > 0$ tel $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, on prend alors le compact $K = \overline{B}(z_0, \alpha)$ et on termine comme avant .

5. Soit $0 < a < b$ et $t > 0$, on a : $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$.

a. Si $t \in]0,1]$, , alors $\ln(t) \leqslant 0$, donc $(a-1)\ln(t) \geqslant (b-1)\ln(t)$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit que $t^{a-1} \geqslant t^{b-1}$. Soit $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.
Si $t > 1$, alors $\ln(t) > 0$, donc $t^{a-1} < t^{b-1}$*et* par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.
Conclusion finale : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :

$$\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}.$$

b. Pour $t \in]0,1]$, on a d'après a) $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$
de même si $t > 1$, on a : $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$
En conclusion : $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0,+\infty[$

c. La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. est continue sur

$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

L'application $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{d}{dx}f(x,t) = \ln(t)f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
De plus pour tout compact $K = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x,t) \in K \times \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|\dfrac{d}{dx}f(x,t)\right| \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}t^{x-1} \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1})$ et que la fonction $\varphi : t \mapsto |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1})$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\sqrt{t}\varphi(t) = \sqrt{t}(t^{a-1}+t^{b-1})e^{-t}|\ln(t)| \underset{t\to 0^+}{\to} 0$. Pour $t \geqslant 1$, $\varphi(t) \leqslant (t^{a-1}+t^{b-1})te^{-t} = (t^a+t^b)e^{-t}$.
Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, il en résulte que Γ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}f(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

d. On a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et comme Γ est continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc

$$\Gamma(x) \sim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

Partie II :

$\lambda > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad y_\alpha(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+\alpha}$

1. $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0,R[$ de l'équation (F_λ) .

L'application $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur R_+^* et que $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]0,R[$ (somme d'une série entière), donc y_α est de classe C^∞ sur $]0,R[$ (produit de fonctions de classes C^∞).
Par calculs : $y'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n-1}$

$y''_\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n-2}$

Donc

$$\begin{aligned} y_\alpha \text{ est solution sur }]0,R[\text{ de } (F_\lambda) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in]0,R[, \quad -(x^2+\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} a_n \\ &\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha + \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in]0,R[\\ &\qquad \sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_n x^{\alpha+n} - \sum \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in]0,R[\\ &\qquad \sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \end{aligned}$$

:
On fait tendre x vers 0^+, obtenir $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$ car $a_0 \neq 0$ et puis $((\alpha+1)^2-\lambda^2)a_1 = 0$ et une recurrence $((\alpha+n)^2-\lambda^2)a_n = a_{n-2}$..

2. $\alpha = \lambda$, $a_0 \neq 0$ et y_λ est solution sur $]0,R[$ de (F_λ) .

a. On a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On sait que (1) $((\lambda+n)^2 - \lambda^2)a_n = a_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$
Puisque . $(\lambda+1)^2 - \lambda^2 \neq 0$, on a $a_1 = 0$ et par la relation (1), on a : $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ .et $a_{2p} = \dfrac{1}{(\lambda+2p)^2-\lambda^2} a_{2(p-1)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc $\prod_{k=1}^{p} a_{2k} = \prod_{k=1}^{p} \dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2} \prod_{k=1}^{p} a_{2(k-1)} = \prod_{k=1}^{p} \dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2} \prod_{k=0}^{p-1} a_{2k}$ soit : $a_{2p} = \prod_{k=1}^{p} \dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2} a_0$.
Mais $(\lambda+2k)^2 - \lambda^2 = 4\lambda k + 4k^2 = 4k(\lambda+k)$, d'où $\prod_{k=1}^{p} \dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2} = \prod_{k=1}^{p} \dfrac{1}{4k(\lambda+k)} = \dfrac{1}{4^p p!} \prod_{k=1}^{p} \dfrac{1}{\lambda+k} = \dfrac{1}{2^{2p} p!} \dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$.
En conclusion :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$$

b. Pour $x > 0$, on a : $\left| \dfrac{a_{2p} x^{2p}}{a_{2(p-1)} x^{2(p-1)}} \right| = \dfrac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}} x^2 = \dfrac{1}{(\lambda+2p)^2+\lambda^2} x^2 \underset{p\to+\infty}{\to} 0$, donc le rayon de convergence R est infini .

c. On suppose $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$.

On a : $\forall x > 0, \quad y_\lambda(x)$

$$\begin{aligned} y_\lambda(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)} x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)} (\frac{x}{2})^{2p+\lambda} 2^\lambda \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)} (\frac{x}{2})^{2p+\lambda} \text{ car } a_0 2^\lambda \Gamma \end{aligned}$$

Equivalent au voisinage de 0 :
D'après les propriétés des séries entières, on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)} (\frac{x}{2})^{2p} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Donc

$$y_\lambda(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} (\frac{x}{2})^\lambda$$

3. On suppose ici que $2\lambda \notin \mathbb{N}$.

a. D'après la question 1 et 2) la fonction $y_{-\lambda}$ est aussi solution sur R_+^* de (F_λ) .

b. Montrons $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions sur R_+^* de (F_λ) .
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} = 0$.
Comme $y_\lambda(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\Gamma(\lambda+1)} (\dfrac{x}{2})^\lambda$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{\Gamma(-\lambda+1)} (\dfrac{x}{2})^{-\lambda}$, on a : $y_\lambda(x) \underset{x\to0^+}{\to} 0$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x\to0^+}{\to} +\infty$, donc si l'on suppose $\alpha \neq 0$, alors en faisant tendre x vers 0, on aboutit à une contradiction.

On conclut que $\alpha = 0$ et puis $\beta = 0$, donc les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes .
(F_λ) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et sans second membre, son ensemble de solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension deux. En conséquence : $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions de (F_λ) et que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_λ) est de la forme :

$$y = \alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in R$$

Partie III.

A- Etude de (F_0) :

Pour $x > 0$, on a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^p p!)^2} x^{2p}$.

1. .

a. Pour tout entier $k \geq 1$: $\prod_{k=1}^{p} a_{2k}(\alpha) = \prod_{k1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2} \prod_{k=1}^{p} a_{2(k-1)}$, donc $a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2} a_0(\alpha)$.
Or $a_0(\alpha) = 1$, d'où la formule cherchée :

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2} \text{ pour tout } p \geq 1.$$

b. D'après les notations de l'enoncé, pour tout $p \in N^*$, on a : $a_{2p}(\alpha) = \exp(\sum_{k=1}^{p} \ln(\frac{1}{(\alpha+2k)^2})) = \exp(-2\sum_{k=1}^{p} \ln(\alpha + 2k))$, donc : $a'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{2}{\alpha+2k} a_{2p}(\alpha)$ et puis

$$\begin{aligned} a'_{2p}(0) &= -2\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} a_{2p}(0) \\ &= -\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} a_{2p}(0) \\ &= -H_p.a_{2p}(0) \end{aligned}$$

Or $a_{2p}(0) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} = \left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2$, donc :

$$b_p = a'_{2p}(0) = -\left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2 H_p$$

c. Calcul du rayon de convergence R_b :
On a $b_p \underset{p\to\infty}{\sim} -\frac{1}{(2^p p!)^2} \ln(p) = o(\frac{1}{2^p p!})$ car $H_p \sim \ln(p)$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum b_p x^p$ est infini :

$$R_b = +\infty$$

2. .

a. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $\begin{aligned}(2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) &= -(2p)^2 a_{2p}(0) \\ &= a_{2p}(0)\left(-(2p\right.\end{aligned}$
.
Mais $(2p)^2 a_{2p}(0) = a_{2(p-1)}(0)$, donc :

$$\begin{aligned} (2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) &= -a_{2p}(0) H_p + 4p a_{2p}(0) \\ &= -a_{2(p-1)}(0) H_{p-1} \underbrace{- \frac{1}{p} a_{2(p-1)}(0) + 4p a_2}_{=0} \\ &= b_{p-1} \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé .

b. L'application $x \mapsto y_0(x)\ln(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (Opérations), donc z_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$z_0(x) = y_0(x)\ln(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p}$$

$$z_0'(x) = \frac{1}{x}y_0(x) + \ln(x).y_0'(x) + 2\sum_{p=1}^{\infty} p b_p x^{2p-1}$$

$$z_0''(x) = -\frac{1}{x^2}y_0(x) + \frac{2}{x}y_0'(x) + \ln(x).y_0''(x) + 2\sum_{p=1}^{\infty} p(2p-1)b_p x^{2p-2}$$

Donc
$$\begin{aligned} x^2 z_0''(x) + x z_0'(x) - (x^2+0)z_0(x) &= -y_0(x) + 2xy_0'(x) + \ln(x).x^2y_0''(x) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p-1)b_p x^{2p} \\ &+ y_0(x) + \ln(x).xy_0'(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p 2p x^{2p} \\ &- x^2\ln(x)y_0(x) - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que y_0 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) et de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} x^2 z_0''(x) + x z_0'(x) - (x^2+0)z_0(x) &= 2xy_0'(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p(2p)^2 x^{2p} - \\ &= \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} 4pa_{2p}(0)x^{2p} + \sum_{p=1}^{\infty} b_p(2}_{\sum_{p=1}^{\infty} b_{p-1}x^{2p}} \end{aligned}$$

car $xy_0'(x) =$

$$= b_0 x^2 = 0$$

Ce qui permet de conclure .

3. Comme $y_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(0+1)}(\frac{x}{2})^0 = 1$, $\lim_{x\to 0}\sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$, on a :
$z_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$.
ceci permet de prouver (comme à la question II 3.b) que les solutions y_0 et z_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) sont linéairement indépendantes .et avec les mêmes raisons que dans $III.3b)$, toute solution de (F_0) est de la forme :
$y = \alpha y_0 + \beta z_0$ où α, β sont des constantes réelles arbitraires .

B- Etude de (F_1) :

1. .
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $c_{2p}(\alpha) = \frac{1}{(\alpha+2p)^2-1}c_{2(p-1)}$, donc $\prod_{k=1}^{p} c_{2k}(\alpha) = \prod_{k=}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2-1}\prod_{k=1}^{p} c_{2(k-1)}$ et par

suite $c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2-1} c_0(\alpha)$.
et comme $c_0(\alpha) = 1$, on déduite que :

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2-1}$$

b. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $d_p = \frac{d}{d\alpha} c_{2p}(1)$. Comme $c_{2p}(\alpha) = \exp(-\sum_{k=1}^{p} \ln((\alpha+2k)^2-1)$, on a : $c'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{2(\alpha+2k)}{(\alpha+2k)^2-1} c_{2p}(\alpha)$. D'où $d_p = -\sum_{k=1}^{p} \frac{2(1+2k)}{(1+2k)^2-1} \prod_{k=}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2-1} = -\sum_{k=1}^{p} \frac{2(1+2k)}{4k(1+k)} \prod_{k=}^{p} \frac{1}{(1+2k)^2-1}$.

Or $\prod_{k=}^{p} \frac{1}{(1+2k)^2-1} = \prod_{k=}^{p} \frac{1}{4k(1+k)} = \frac{1}{2^{2p}} \prod_{k=}^{p} \frac{1}{k(1+k)} = \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p!} \frac{1}{(p+1)!}$

$\frac{2(1+2k)}{4k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})$,

donc $\sum_{k=1}^{p} \frac{2(1+2k)}{4k(k+1)} = \frac{1}{2}(H_p + H_{p+1} - 1)$. D'où le résultat demandé :

$$d_p = \frac{1}{2^{2p+1} p!(p+1)}(H_p + H_{p+1} - 1)$$

c. On a :

$d_p = \frac{1}{2^{2p+1} p!(p+1)}(H_p + H_{p+1} - 1) = \frac{1}{2^{2p+1} p!(p+1)!}(2H_p + \frac{1}{p+1} - 1) \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p!(p+1)!} \ln(p)$, donc le rayon de convergence demandé :

$$R_d = +\infty$$

2. .

a. On a : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\left((1+2p)^2-1\right) d_p + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$. En effet : par dérivation de l'identité $c_{2p}(\alpha)\left((1+2p)^2-1\right) = c_{2(p-1)}(\alpha)$, on a : $c'_{2p}(\alpha)\left((\alpha+2p)^2-1\right) + 2(\alpha+2p)c_{2p}(\alpha) = c'_{2(p-1)}(\alpha)$ et
Pour $\alpha = 1$, on a :

$$d_p((1+2p)^2-1) + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$$

b. Il est clair que les fonctions y_1 et $x \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^{2p+1}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation on obtient pout tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x) &= x^2\left(2y_1'(x)\ln(x)+\frac{4}{x}y_1'(x)-\frac{2}{x^2}y_1(x)+\sum_{p=1}^{\infty}2p(2p+1)d_px^{2p-1}\right)\\
&\quad +x\left(2y_1'(x)\ln(x)+\frac{2}{x}y_1(x)+\sum_{p=1}^{\infty}(2p+1)d_px^{2p}\right)\\
&\quad -(1+x^2)\left(2y_1(x)\ln(x)+\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2p+1}\right)\\
&= 2\ln(x)\left(x^2y_1''(x)+xy_1'(x)-(1+x^2)y_1(x)\right)+4xy_1'(x)\\
&\quad +\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2d_px^{2p+1}-(1+x^2)\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2p+1}
\end{aligned}$$

Comme y_1 est xsolution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1), on a : $x^2y_1''(x)+xy_1'(x)-(1+x^2)y_1(x)=0$ et donc

$$\begin{aligned}
x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x) &= 4xy_1'(x)+\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2d_p \ldots\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{4(2p+1)}{p!(p+1)!2^{2p+1}}x^{2p+1} \ldots\\
&\quad -\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2(p+\ldots}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{p!(p+1)!2^{2p}}}_{=c_{2p}(1)}\frac{4(2p+1\ldots}{2}\\
&\quad +\sum_{p=0}^{\infty}((2p+1)^2-1)d_p\ldots\\
&= \sum_{p=1}^{\infty}\underbrace{\left(2(2p+1)c_{2p}(1)+((\ldots\right.}\\
&= 2x
\end{aligned}$$

On déduit alors que u_1 est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1)
.

3. .

a. On pose $u_1(x)=\frac{e_0}{x}+\sum_{p=1}^{\infty}e_px^{p-1}$ avec $R=Rcv(\sum_{p\geqslant 1}e_px^{p-1})>0$.

Sur $]0,R[$, on a : $x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x)-2x=x^2\left(\frac{2e_0}{x^3}+\sum_{p=1}^{\infty}(p-1)(p-2)e_px^{p-2}\right)+$

$x\left(\frac{-e_0}{x^2}+\sum_{p=1}^{\infty}(p-1)e_px^{p-2}\right)-2x=\sum_{p=0}^{\infty}(p(p-1)e_p-e_{p-2})x^{p-1}-(e_0+2)x-e_1=0$. comme dans la question ...., on déduit : $\begin{cases} e_0=-2 \\ e_1=0 \\ \forall p\geqslant 3, p(p-2)e_p-e_{p-1}=0 \end{cases}$, ce qui permet de conclure par une récurrence que : $\forall p\in N$, $e_{2p+1}=0$ et $e_{2p}=\dfrac{e_0}{2^{2p}p!(p+1)!=-2c_{2p}(1)}$ car $e_0=-2$ et par suite R est infini et que u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1).

b. (F_1) est une équation différentielle linéaire sans second membre associée à (E_1) et comme z_1 et u_1 sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1), il en résulte que z_1-u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) .

4. Comme dans la question....., en étudiant le comportement des solutions z_1 et y_1 au voisinage de 0^+, on déduit que (y_1,z_1) est système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1), donc toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) est de la forme : $y : x\mapsto \alpha y_1(x)+\beta z_1(x)$ où α et β sont des constantes réelles arbitraires .