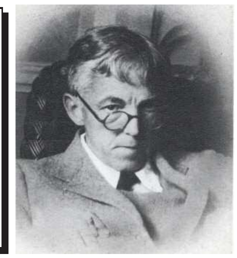
CPGE My Youssef, Rabat

DL 12 (09-10): *Séries entieres*

8 février 2010

Blague du jour :
- Donner une définition du mot FIAT ? Ferraille Invendu A Turin.

- Trois amis discutent de leurs voitures :
- Le premier dit "Et bien moi dans ma nouvelle BMW j'ai l'air conditionné "
- Le deuxième lui se vente aussi "Moi dans ma Mercedes j'ai l'Air Bag "
- Et enfin le troisième "Et bien moi dans ma Renault j'ai l'air...CON "



Mathématicien du jour **Hardy** Godfrey Harold Hardy (1877-1947) est un éminent mathématicien anglais, connu surtout pour ses travaux en analyse mathématique et théorie des nombres, mais aussi par son opposition à la guerre et à l'usage des mathématiques dans la l'industrie militaire.

PROBLÉME I : Source : Concours EPITA, 2003.

Dans ce problème, on étudie les intégrales $u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$ où $n \in \mathbf{N}$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx$.

1°) Dans cette question, on étudie la suite (u_n) pour $n \in \mathbf{N}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2.

b) Etablir à l'aide d'une intégration par parties que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

c) En déduire que la suite $n \to (n+1)u_{n+1}u_n$ est constante, et préciser la valeur de cette constante.

d) Etudier le sens de variation de la suite (u_n), puis en déduire que $nu_n^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$.

e) En déduire la limite et un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

2°) Dans cette question, on étudie les intégrales des fonctions f_n définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } -\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n} \quad \text{ et } \quad f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

a) Etablir les égalités suivantes : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n(x)dx = \sqrt{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)dt$.

b) A l'aide de l'équivalent obtenu à la question 1, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$.

3°) Dans cette question, on étudie l'intégrale de la limite de la suite de fonctions (f_n).

a) Déterminer pour tout nombre réel x la limite $f(x)$ de la suite $(f_n(x))$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Justifier l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$ pour tout nombre réel positif u.
En déduire l'inégalité $f_n(x) \leq f(x)$ pour tout nombre réel x.

c) Etablir à l'aide du théorème de convergence dominée dont on rappellera l'énoncé que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx$.

4°) Dans cette question, on étudie la série génératrice des nombres u_n, définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n .$$

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

b) Etudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$, et en déduire le domaine de définition D de S.

c) Etablir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in D$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)dt}{1 - x\cos(t)}.$$

d) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos(t)}$ pour $|x| < 1$, puis pour $x = -1$.

e) Calculer $S(-1)$, puis $S(x)$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variables $u = \tan(\frac{t}{2})$.

PROBLÉME II : Source : Concours ISFA, 2005.

UN THEOREME DE HARDY-LITTLEWOOD

Notation : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ désignera la limite finie ou infinie, lorsqu'elle existe, de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Le but du problème est de démontrer le théorème ci-dessous :

> Si la fonction f est définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où (a_n) est une suite de réels positifs,
>
> il y a équivalence entre (1) et (2) :
>
> (1) : $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x) f(x) = 1$
>
> (2) : $\sum_{k=0}^{n} a_k \sim n$

PREMIERE PARTIE

1. Importance de l'hypothèse « (a_n) est une suite de réels positifs ».

On considère la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par : $f(x) = 4\dfrac{1-x}{(1-x^2)^2}$.

a. Montrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de 0.

b. On note pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, montrer que f vérifie (1) et ne vérifie pas (2).

2. Dans cette question, f est définie sur $]-1, 1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ où $\sum \alpha_n$ est une série de réels positifs et divergente.

a. Montrer que la fonction f admet une limite quand x tend vers 1^- et déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

b. Soit (b_n) une suite de réels vérifiant $\alpha_n \sim b_n$ au voisinage de $+\infty$.

On pose pour $x \in [0, 1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

i. Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $|\alpha_n - b_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\alpha_n$.

ii. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $|f(x) - g(x)| \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{n_0-1} |\alpha_n - b_n| + \frac{\varepsilon}{2} f(x)$.

iii. Conclure que, pour x au voisinage de 1^-, $f(x) \sim g(x)$.

c. *Application*

Si la suite de réels positifs (α_n) converge vers un réel non nul l (donc $\alpha_n \sim l$), donner un équivalent, au voisinage de 1^-, de $f(x)$.

3. Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où (a_n) est une suite de réels positifs et vérifiant (2) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \sim n$.

a. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On précisera le rayon de convergence de ce développement en série entière.

b. Déterminer un équivalent au voisinage de 1^- de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

c. Conclure que $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) f(x) = 1$.

DEUXIEME PARTIE

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où (a_n) est une suite de réels positifs et vérifiant (1) : $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) f(x) = 1$.

On notera $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des applications bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme notée $\| \ \|_\infty$: pour $f \in \mathcal{B}$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

4. Si $g \in \mathcal{B}$, justifier que pour $x \in [0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n g(x^n)$ converge.

On notera pour g élément de $\mathcal{B}$ et $x \in [0,1[$, $S(g)(x) = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n)$.

On considère l'ensemble E des éléments de $\mathcal{B}$ pour lesquels la fonction $S(g)$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et, pour g élément de E, on posera $l(g) = \lim\limits_{x\to 1^-} S(g)(x)$.

5. Propriétés

a. Si $k \in \mathbb{N}$ et $g_k : x \mapsto x^k$, calculer $l(g_k)$. Ensuite comparer le résultat avec $\displaystyle\int_0^1 x^k \mathrm{d}x$.

b. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $l : E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g \mapsto l(g)$ est linéaire.

c. Montrer que l'application l est continue (E est muni de $\| \ \|_\infty$) et calculer $|||\, l \,|||$.

6. Si g est une fonction continue sur $[0,1]$, montrer que $l(g)$ existe et que $l(g) = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

On pourra utiliser le théorème de Weierstrass suivant : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynômes.

7. On considère la fonction h élément de $\mathcal{E}$ définie par :

$$h(x) = 0 \text{ pour } x \in \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[\quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x} \text{ pour } x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right].$$

On choisit un réel $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$.

a. On désigne par a_ε la fonction continue sur $[0,1]$ qui coïncide avec h sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\mathrm{e}} + \varepsilon, 1\right]$ et qui est affine sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}} + \varepsilon\right]$ et on désigne par b_ε la fonction continue sur $[0,1]$ qui coïncide avec h sur les intervalles $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}} - \varepsilon\right]$ et $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right]$ et qui est affine sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}} - \varepsilon, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

On a ainsi $a_\varepsilon \le h \le b_\varepsilon$: construire les trois fonctions définies sur $[0,1]$.

Uniquement à l'aide de la figure et par des considérations d'aires de triangles, déterminer une constante λ telle que :

$$\int_0^1 b_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x + \lambda\,\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 a_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x - \lambda\,\varepsilon.$$

b. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1[$ tel que pour tout réel $x \in [\alpha, 1[$ on ait :

$$-\varepsilon + l(a_\varepsilon) \le S(a_\varepsilon)(x) \le S(h)(x) \le S(b_\varepsilon)(x) \le \varepsilon + l(b_\varepsilon).$$

c. Conclure que la fonction $h \in E$ et déterminer $l(h)$.

d. Pour N entier naturel non nul, déterminer $S(h)(\mathrm{e}^{\frac{-1}{N}})$ et en déduire que : $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \sim N$.

8. *Application*

Proposer, en utilisant la question **3. c**., une démonstration du théorème de Cesàro :

si la suite de réels (u_n) converge vers un réel l non nul alors la suite $\left(\frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}\right)$ converge vers l.

9. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\ge1} u_n$ avec, pour $n \ge 1$, $u_n = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}$.

Fin
À la prochaine