Corrigé : Pr. Hfa, CPGE Agadir, Maroc

Rappels du cours :
En plus du programme Français, ce problème utilise ce petit rappel du cours, qui fait partie

du programme Marocain.
Définition :
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une application.
(i) On dit que f est holomorphe en a si $\lim\limits_{\substack{z \to a \\ \neq}} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe dans $\mathbb{C}$.
Dans ce cas cette limite est notée : $f'(a) = \lim\limits_{\substack{z \to a \\ \neq}} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$, dite dérivée de f en a.
(ii) On dit que f est holomorphe sur U si f est holomorphe en tout point de U, et dans ce

cas, l'application $f' : U \to \mathbb{C}$ est dite la dérivée de f sur U.
Remarques : (Opérations sur les dérivées)
(i) On dérive de la même manière que pour les fonctions d'une variable réelle, le produit, le
rapport (quand il est défini), les combinaisons linéaires, de deux fonctions holomorphes.
(ii) Si U est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe sur U,

alors f est constante sur U si et seulement si $\forall z \in U \ ; \ f'(z) = 0$.
Théorème : (Équations de Cauchy Riemann)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une application.
On pose : $\widetilde{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ tq \ \ x+iy \in U\}$ et $\forall (x,y) \in \widetilde{U}$; $\widetilde{f}(x,y) = f(x+iy)$.
On pose aussi : $\forall (x,y) \in \widetilde{U}$; $P(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $Q(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$.
Alors $\widetilde{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est holomorphe sur U.
(ii) $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\widetilde{U}$ et $\forall (x,y) \in \widetilde{U}$; $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y) = 0$.
(iii) P et Q sont de classe C^1 sur $\widetilde{U}$ et $\forall (x,y) \in \widetilde{U}$;
$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$
Remarque :
Sous les notations du théorème précèdente, si f est holomorphe sur U, alors :
$$\forall (x,y) \in \widetilde{U} \ ; \ f'(x+iy) = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x}(x,y) = -i\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y}(x,y)$$

Théorème : (Principe des zéros isolés)
Soient U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une application holomorphe.
On suppose que f n'est pas identiquement nulle, et qu'il existe $a \in U$ tel que : $f(a) = 0$.
alors il existe $r > 0$, tel que $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \ \ tq \ \ |z-a| < r\} \subset U$ et $\forall z \in D(a,r) \backslash \{a\}$; $f(z) \neq 0$.

Autrement dit (par contraposée) si $\{z \in U \quad \text{tq} \quad f(z) = 0\}$ admet un point d'accumulation,
alors f est identiquement nulle.

Dans tout ce problème, on pose : $q(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n^2 x}}{i\pi n^2}$

$1^{\text{ère}}$ Partie : Formule sommatoire de Poisson

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe C^1 telle que : $g(t) = \underset{|t|\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$ et $g'(t) = \underset{|t|\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$.

On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$; $g_0(t) = g(t)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g_n(t) = g(t+2n\pi) + g(t-2n\pi)$.

1.1) L'application $[t \overset{h}{\longmapsto} g(t)e^{-ixt}]$ est continue sur $\mathbb{R}$, et d'aprés l'hypothèse ci-dessus :
$h(t) = \underset{|t|\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$, alors h est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\widehat{g}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt}dt$. $\widehat{g}$ est la transformée de Fourier de g.

1.2) L'application $\left[t \longmapsto t^2 g(t)\right]$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = \underset{|t|\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$, alors il existe $A > 0$,
tel que cette application est bornée sur $\mathbb{R}\backslash[-A, A]$, cette application est continue sur le segment $[-A, A]$, donc bornée sur ce segment, et par suite bornée sur $\mathbb{R}$.
Il existe alors $M > 0$; $\forall t \in \mathbb{R}$; $\left|t^2 g(t)\right| \leq M$.
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, Puisque : $\lim\limits_{n\to\infty}(b - 2n\pi) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(a + 2n\pi) = +\infty$
$\exists N \in \mathbb{N}^*$; $\forall n \geq N$; $\forall t \in [a, b]$; $(t - 2n\pi) \leq (b - 2n\pi) < 0$ et $(t + 2n\pi) \geq (a + 2n\pi) > 0$.
$\forall n \geq N$; $\forall t \in [a, b]$; $|g_n(t)| \leq \dfrac{M}{(t-2n\pi)^2} + \dfrac{M}{(t+2n\pi)^2} \leq \dfrac{M}{(b-2n\pi)^2} + \dfrac{M}{(a+2n\pi)^2}$.
$\dfrac{M}{(b-2n\pi)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{M}{4\pi^2 n^2}$ *et* $\dfrac{M}{(a+2n\pi)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{M}{4\pi^2 n^2}$ alors la série $\sum\left(\dfrac{M}{(b-2n\pi)^2} + \dfrac{M}{(a+2n\pi)^2}\right)$ converge.

Par conséquent : la série $\left(\sum\limits_{n\geq N} g_n(t)\right)$ converge normalement pour $t \in [a, b]$.

Conclusion : la série $\left(\sum\limits_{n\geq 0} g_n(t)\right)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
1.3) On note $\widetilde{g}$ la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $\widetilde{g}(t) = \sum\limits_{n\geq 0} g_n(t)$.

1.3.1) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$; g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Notons que : $\forall t \in \mathbb{R}$; $g_0'(t) = g'(t)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g_n'(t) = g'(t+2n\pi) + g'(t-2n\pi)$.
On remplace g par g' dans la question précèdente, on obtient alors que la série : $\left(\sum_{n\geq 0} g_n'\right)$
converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
D'où $\tilde{g}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$; $\tilde{g}'(t) = \sum_{n\geq 0} g_n'(t)$.

1.3.2) Remarquons que d'aprés le raisonnement de la question 1.2) on a :
$\forall t \in \mathbb{R}$; les séries $\left(\sum_{n\geq 1} g(t+2n\pi)\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 1} g(t-2n\pi)\right)$ convergent.
$\forall t \in \mathbb{R}$; $\tilde{g}(t+2\pi) = \sum_{n\geq 0} g_n(t+2\pi) = g(t+2\pi) + \sum_{n\geq 1} g(t+2(n+1)\pi) + \sum_{n\geq 1} g(t-2(n-1)\pi)$.
$\tilde{g}(t+2\pi) = g(t+2\pi) + \sum_{n\geq 2} g(t+2n\pi) + \sum_{n\geq 0} g(t-2n\pi)$.
$\tilde{g}(t+2\pi) = g(t+2\pi) + g(t) + g(t-2\pi) + \sum_{n\geq 2} (g(t+2n\pi) + g(t-2n\pi)) = \tilde{g}(t)$.
$\forall k \in \mathbb{Z}$; $c_k(\tilde{g}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \tilde{g}(t)e^{-ikt}dt$.
$\forall n \in \mathbb{N}$; $\forall t \in \mathbb{R}$; $\left|\tilde{g}(t)e^{-ikt} - \sum_{p=0}^{n} g_p(t)e^{-ikt}\right| = \left|\tilde{g}(t) - \sum_{p=0}^{n} g_p(t)\right|$.

Alors, d'aprés 1.2) la série $\sum_{p=0}^{n} g_p(t)e^{-ikt}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers
$[t \longmapsto \tilde{g}(t)e^{-ikt}]$, en particulier sur $[0, 2\pi]$. On déduit alors que :
$\forall k \in \mathbb{Z}$; $c_k(\tilde{g}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{2\pi} g_n(t)e^{-ikt}dt$

$\forall k \in \mathbb{Z}$; $c_k(\tilde{g}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt + \dfrac{1}{2\pi}\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^{2\pi} g(t+2n\pi)e^{-ikt}dt + \int_0\right.$
On pose : $u = t + 2n\pi$ et $v = t - 2n\pi$.
$\forall k \in \mathbb{Z}$; $c_k(\tilde{g}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt + \dfrac{1}{2\pi}\sum_{n\geq 1}\left(\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} g(u)e^{-iku}du + \int_{-}\right.$

De 1.1) l'application $[t \longmapsto g(t)e^{-ikt}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la relation de Chasle donne alors :
$\forall k \in \mathbb{Z}$; $c_k(\tilde{g}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt + \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{+\infty} g(u)e^{-iku}du + \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} g(v)e^{-ikv}dv$.
$\forall k \in \mathbb{Z}$; $c_k(\tilde{g}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ikt}dt = \dfrac{1}{2\pi}\hat{g}(k)$.

1.3.3) $g(2n\pi) \underset{|n|\to\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ alors les séries $\left(\sum_{n\geq 0} g(2n\pi)\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 1} g(-2n\pi)\right)$ sont
absolument convergentes, et donc la famille $(g(2n\pi))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

$\forall n \in \mathbb{Z}\ ;\ \widehat{g}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-int}dt = 2\pi c_n(\widetilde{g})$.

$\widetilde{g}$ est 2π-périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{Z}\ ;\ c_n(\widetilde{g}') = inc_n(\widetilde{g})$.

$\forall n \in \mathbb{Z}^*\ ;\ |c_n(\widetilde{g})| = \frac{1}{|n|}|c_n(\widetilde{g}')| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n^2} + |c_n(\widetilde{g}')|^2)$.

La famille $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable, et d'aprés la formule de Parseval, la famille $(|c_n(\widetilde{g}')|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$
est aussi sommable, donc la famille $(|c_n(\widetilde{g})|)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et par suite la famille $(\widehat{g}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$
est aussi sommable.

D'autre part, en utilisant le théorème de Direchlet, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\widetilde{g}) = 2\pi\widetilde{g}(0) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi).$$

<u>2ème Partie :</u> Application de la formule sommatoire de Poisson

Pour tout réel $\alpha > 0$, on note h_α la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha^2t^2}$.

2.1) h_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{|t|\to\infty} t^2h_\alpha(t) = \lim\limits_{|t|\to\infty} t^2h'_\alpha(t) = 0$, alors les applications
$[t \longmapsto t^2h_\alpha(t)]$ et $[t \longmapsto t^2h'_\alpha(t)]$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, et donc h_α

vérifie les hypothèses de g.

2.2) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ h_1(x) = e^{-x^2}$ et $\widehat{h_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-itx}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-ixt}dt$.

L'application $[(x,t) \overset{\varphi}{\longmapsto} e^{-t^2-ixt}]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| = |t|\, e^{-t^2}$ et l'application $[t \longmapsto |t|\, e^{-t^2}]$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}$.

$\widehat{h_1}$ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \widehat{h_1}'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)dt = -i\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2-ixt}dt$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \widehat{h_1}'(x) + \frac{x}{2}\widehat{h_1}(x) = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(-ix-2t)e^{-t^2-ixt}dt = \frac{i}{2}\left[e^{-t^2-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

$\widehat{h_1}$ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : (1)

$$y' + \frac{x}{2}y = 0.$$

2.3) La solution générale de (1) est $y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$. avec λ constante réelle.

Posons alors : $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \widehat{h_1}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$. $\widehat{h_1}(0) = \lambda = \sqrt{\pi}$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \widehat{h_1}(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

2.4) $\forall x \in \mathbb{R}\ ; \widehat{h_\alpha}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2t^2-ixt}dt$. On pose : $u = \alpha t$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ ; \widehat{h_\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-ix\frac{u}{\alpha}}du = \frac{1}{\alpha}\widehat{h_1}(\frac{x}{\alpha}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}$.

2.5) Maintenant, appliquons 1.3.3) à h_α. $2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_\alpha(2n\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{h_\alpha}(n)$.

$$2\pi\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4n^2\pi^2\alpha^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{4\alpha^2}}\right).$$

Soit $a > 0$, on applique la formule ci-dessus pour $\alpha = \sqrt{\dfrac{a}{4\pi}}$. On obtient :

$$\sqrt{a}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 a}\right) = \left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}\right).$$

$3^{\text{ème}}$ Partie : Un résultat général sur les fonctions holomorphes

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on pose : $\forall t \in [0,1]$; $\gamma_{a,b}(t) = (1-t)a + tb$.

On note aussi : $\Omega = \{z \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Im}(z) > 0\}$.
3.1) Ω est un demi plan, alors $\forall a, b \in \Omega$; $[a,b] \subset \Omega$.
Ω est donc convexe, et par suite Ω est connexe par arcs.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continue.

On pose : $\forall (a,b) \in \Omega^2$; $\Phi(a,b) = \displaystyle\int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz = (b-a)\int_0^1 f((1-t)a+tb)dt$.

3.2) Soit a fixé dans Ω, et Φ_a l'application définie sur Ω par : $\forall b \in \Omega$; $\Phi_a(b) = \Phi(a,b)$.
f est continue, alors l'application $\left[(t,b) \xrightarrow{F_a} f((1-t)a+tb)\right]$ est continue sur $[0,1]\times\Omega$, alors
$\Phi_a(b) = \displaystyle\int_0^1 F_a(t,b)dt$ définit une applicaton continue sur Ω.

3.3) Soient $a, b, c \in \Omega$.

$$\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = (c-a)\int_0^1 ((1-t)\bar{a} + t\bar{c})dt + (b-c)\int_0^1 ((1-t)\bar{c} + t\bar{b})dt.$$

$$\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \frac{1}{2}\left((c\bar{a} - |a|^2) + (b\bar{c} - |c|^2) + (|c|^2 - a\bar{c}) + (|b|^2\right.$$

$$\int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz = \frac{1}{2}\left((b\bar{a} - |a|^2) + (|b|^2 - a\bar{b})\right).$$

$\displaystyle\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz$ si et seulement si

$$\left((c\bar{a} - |a|^2) + (b\bar{c} - |c|^2) + (|c|^2 - a\bar{c}) + (|b|^2 - c\bar{b})\right) = \left((b\bar{a} - |a|^2) + (|b|^2\right.$$

si et seulement si $\quad c\bar{a} + b\bar{c} - a\bar{c} - c\bar{b} = b\bar{a} - a\bar{b}$
si et seulement si $\quad c(\bar{a} - \bar{b}) - (a-b)\bar{c} = b\bar{a} - a\bar{b}$
si et seulement si $\quad \mathrm{Im}(c(\bar{a} - \bar{b}) - b\bar{a}) = 0$

si et seulement s'il existe un réel λ, tel que : $c = \dfrac{\lambda + b\bar{a}}{\bar{a} - \bar{b}}$

L'ensemble des $c \in \Omega$ tels que : $\displaystyle\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz$

est une droite horizontale si $(a-b) \in \mathbb{R}$ et c'est une demi-droite ouverte si non.
3.4) Dans la suite de cette partie, f est supposée holomorphe sur Ω, et si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$(x+iy) \in \Omega$, on pose : $P(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy))$ et $Q(x,y) =$

$\mathrm{Im}(f(x+iy))$.

3.4.1) Les équations de Cauchy Riemann : $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{\partial P}{\partial y}}$

3.4.2) Soit $(a,b,c)\in\Omega^3$. D'aprés la formule de Green-Riemann on a :

$\displaystyle\int_{\partial T^+} Pdx-Qdy=\int\int_T\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$

$\displaystyle\int_{\partial T^+} Qdx+Pdy=\int\int_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=0.$ D'autre part, on a :

$$0=\int_{\partial T^+} Qdx+Pdy=\pm\left(\int_{\gamma_{a,c}} Qdx+Pdy+\int_{\gamma_{c,b}} Qdx+Pdy+\int_{\gamma_{b,a}} Qdx+Pdy\right)$$

$(*)$

$$0=\int_{\partial T^+} Pdx-Qdy=\pm\left(\int_{\gamma_{a,c}} Pdx-Qdy+\int_{\gamma_{c,b}} Pdx-Qdy+\int_{\gamma_{b,a}} Pdx-Qdy\right)$$

$(**)$

$\gamma_{a,c}$ est paramétré par : $\begin{cases} x=(1-t)\mathrm{Re}(a)+t\mathrm{Re}(c)\\ y=(1-t)\mathrm{Im}(a)+t\mathrm{Im}(c)\end{cases}$; $t\in[0,1]$; $\begin{cases} x'=\mathrm{Re}(c)-\mathrm{Re}(a)\\ y'=\mathrm{Im}(c)-\mathrm{Im}(a)\end{cases}$.

$\displaystyle\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz=(b-a)\int_0^1\left(P(x(t),y(t))+iQ(x(t),y(t))\right)dt$

$\displaystyle\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz=\int_0^1(\mathrm{Re}(c)-\mathrm{Re}(a))\,P(x(t),y(t))-(\mathrm{Im}(c)-\mathrm{Im}(a))\,Q(x(t),y(t))dt$

$\displaystyle+i\int_0^1(\mathrm{Re}(c)-\mathrm{Re}(a))\,Q(x(t),y(t))+(\mathrm{Im}(c)-\mathrm{Im}(a))\,P(x(t),y(t)))dt.$

$\displaystyle\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz=\int_{\gamma_{a,c}} Pdx-Qdy+i\int_{\gamma_{a,c}} Qdx+Pdy.$

D'où d'aprés les formules $(*)$ et $(**)$ ci-dessus :

$\displaystyle\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz+\int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz+\int_{\gamma_{b,a}} f(z)dz=0$ et $\displaystyle\int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz=\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz+\int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz.$

3.4.3) a est toujours fixé dans Ω. Soit $b\in\Omega$ et $c\in\Omega\backslash\{b\}$.

$\displaystyle\frac{\Phi_a(c)-\Phi_a(b)}{c-b}=\frac{1}{c-b}\left(\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz-\int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz\right)=\frac{1}{c-b}\int_{\gamma_{b,c}} f(z)dz=\int_0^1 f((1-t)b+tc)dt.$

L'application $[(t,c)\longmapsto f((1-t)b+tc)]$ est continue sur $[0,1]\times\Omega$, alors l'application

$\displaystyle\left[c\longmapsto\int_0^1 f((1-t)b+tc)dt\right]$ est continue sur Ω, donc

$\displaystyle\lim_{\substack{c\to b\\ \neq}}\frac{\Phi_a(c)-\Phi_a(b)}{c-b}=\int_0^1 f(b)dt=f(b).$

3.4.4) On suppose que, pour tout $b\in\Omega$, la fonction $[r\longmapsto\Phi(ir,b]$, définie sur $]0,+\infty[$,
admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque r tend vers 0^+. On note $F(b)$ cette limite.
Soit $(b,c)\in\Omega^2$ et soit $r>0$.

$F(c)-F(b)=\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ >}}(\Phi(ir,c)-\Phi(ir,b))=\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ >}}\left(\int_{\gamma_{ir,c}} f(z)dz+\int_{\gamma_{b,ir}} f(z)dz\right)$ $\int_{\gamma_{b,c}} f(z)dz=\Phi(b,c)$.

Fixons $b\in\Omega$ et soit $c\in\Omega\setminus\{b\}$.

$\dfrac{F(c)-F(b)}{c-b}=\displaystyle\int_0^1 f((1-t)b+tc)dt$, alors d'aprés la question précèdente : $\lim\limits_{\substack{c\to b\\ \neq}}\dfrac{F(c)-F(b)}{c-b}=f(b)$.

On déduit alors que F est holomorphe sur Ω et que $F'=f$ sur Ω.

$4^{\text{ème}}$ Partie : Étude d'un exemple

Soit λ un réel fixé dans l'intervalle $]-1,0[$; et f_λ la fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ par :

$f_\lambda(z)=z^\lambda\exp(-\dfrac{i}{z})$

4.1) Les fonctions $[z\longmapsto z^\lambda=\exp(\lambda\log(z))]$ et $[z\longmapsto -\dfrac{i}{z}]$ sont holomorphes sur Ω, alors la

fonction f_λ est produit deux fonctions holomorphes sur Ω, f_λ est donc holomorphe sur Ω.

4.2) Soit b un complexe fixé dans Ω. On pose : $\forall r>0$; $J_{\lambda,b}(r)=\displaystyle\int_{\gamma_{ir,b}} f_\lambda(z)dz$.

$J_{\lambda,b}(r)=(b-ir)\displaystyle\int_0^1((1-t)ir+tb)^\lambda\exp(-\frac{i}{((1-t)ir+tb)})dt$.

$\forall r>0$; $[t\longmapsto((1-t)ir+tb)^\lambda\exp(-\dfrac{i}{((1-t)ir+tb)})]$ est continue sur le segment $[0,1]$.

$\forall r>0$; $\forall t\in[0,1]$; $\left|\exp(-\dfrac{i}{((1-t)ir+tb)})\right|=$ $\left|\exp(-\dfrac{i(t\overline{b}-(1-t)ir)}{(|(1-t)ir+tb|)^2})\right|=\exp(-\dfrac{t\mathrm{Im}(b)+(1-t)r}{(|(1-t)ir+tb|)^2})\leq 1$

$\left|((1-t)ir+tb)^\lambda\exp(-\dfrac{i}{((1-t)ir+tb)})\right|\leq\left|((1-t)ir+tb)^\lambda\right|=$

$|(1-t)ir+tb|^\lambda$

$\left|((1-t)ir+tb)^\lambda\exp(-\dfrac{i}{((1-t)ir+tb)})\right|\leq\Big(((1-t)\,r+t\mathrm{Im}(b))^2+t^2\mathrm{Re}(b$

$\dfrac{\lambda}{2}<0$, alors $[t\longmapsto t^{\frac{\lambda}{2}}]$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, alors :

$\left|((1-t)ir+tb)^\lambda\exp(-\dfrac{i}{((1-t)ir+tb)})\right|\leq|b|^\lambda t^\lambda=\dfrac{|b|^\lambda}{t^{-\lambda}}$ avec $-\lambda<1$,

L'application $[t\longmapsto\dfrac{|b|^\lambda}{t^{-\lambda}}]$ est continue intégrable sur $]0,1]$.

$\forall t\in]0,1]$; $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ >}}((1-t)ir+tb)^\lambda\exp(-\dfrac{i}{((1-t)ir+tb)})=$ $b^\lambda t^\lambda\exp(\dfrac{-i}{tb})$.

En plus l'application $[t\longmapsto b^\lambda t^\lambda\exp(\dfrac{-i}{tb})]$ est continue sur $]0,1]$.

Alors d'aprés le théorème de convergence dominée, on a :

$\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ >}}\displaystyle\int_0^1((1-t)ir+tb)^\lambda\exp(-\frac{i}{((1-t)ir+tb)})dt=\int_0^1 b^\lambda t^\lambda\exp(\frac{-i}{tb})dt$.

D'où $\lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ >}} J_{\lambda,b}(r) = F_\lambda(b) = b^{\lambda+1}\int_0^1 t^\lambda \exp(\frac{-i}{tb})dt.$

4.3) On note G_λ la fonction, définie pour tout $z \in \Omega$, par $G_\lambda(z) = z^{-\lambda-2}\exp(\frac{i}{z})F_\lambda(z)$.

4.3.1) F_λ est holomorphe sur Ω et $F'_\lambda = f_\lambda$ d'aprés 3.4.4), G_λ est produit de trois fonctions

holomorphes sur Ω, alors G_λ est aussi holomorphe sur Ω.

4.3.2) $\forall z \in \Omega \;;\; G_\lambda(z) = z^{-\lambda-2}\exp(\frac{i}{z})z^{\lambda+1}\int_0^1 t^\lambda \exp(\frac{-i}{tz})dt = \frac{1}{z}\exp(\frac{i}{z})\int_0^1 t^\lambda \exp(\frac{-i}{tz})dt.$

On pose : $u = \frac{1}{t}$; $dt = \frac{-du}{u^2}$. $\forall z \in \Omega$; $G_\lambda(z) = \frac{1}{z}\exp(\frac{i}{z})\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2}\exp(\frac{-iu}{z})du.$

4.3.3) $G_\lambda(z) = \frac{1}{z}\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2}\exp(\frac{-i(u-1)}{z})du = \frac{1}{z}\int_0^{+\infty}(1+v)^{-\lambda-2}\exp(\frac{-iv}{z})dv$

(où l'on a posé $v = u-1$) ; $\left|\exp(\frac{-iv}{z})\right| = \left|\exp(\frac{-iv\bar{z}}{|z|^2})\right| = \exp(\frac{-v\mathrm{Im}(z)}{|z|^2}) \le 1$

$G_\lambda(z) = i\left[(1+v)^{-\lambda-2}\exp(\frac{-iv}{z})\right]_0^{+\infty} + i(\lambda+2)\int_0^{+\infty}(1+v)^{-\lambda-3}\exp(\frac{-iv}{z})dv$

$G_\lambda(z) = -i + i(\lambda+2)\int_0^{+\infty}(1+v)^{-\lambda-3}\exp(\frac{-iv}{z})dv.$

$\mathrm{Im}(z) > 0$ et $v > 0$, alors $\left|\exp(\frac{-iv}{z})\right| \le 1$.

$|G_\lambda(z)| \le 1 + (\lambda+2)\int_0^{+\infty}(1+v)^{-\lambda-3}dv = 1 + \left[-(1+v)^{-\lambda-2}\right]_0^{+\infty} = 2.$

D'aprés 4.3) et l'étape précèdente : $\left|F_{-\frac{1}{2}}(z)\right| = \left|G_{-\frac{1}{2}}(z)\right| |z|^{\frac{3}{2}} \left|\exp\left(\frac{-i}{z}\right)\right| \le 2|z|^{\frac{3}{2}}$.

<u>5ème Partie</u> : Démonstration de la propriété proposée

Pour tout entier naturel non nul n, on note u_n la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :

$$u_n(z) = \exp(i\pi n^2 z)$$

5.1) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $|u_n(z)| = \exp(-\pi n^2 \mathrm{Im}(z))$.
Si $\mathrm{Im}(z) \le 0$ alors la série $\left(\sum u_n(z)\right)$ diverge grossièrement.
Si $\mathrm{Im}(z) > 0$ alors $|u_n(z)| = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors $\left(\sum u_n(z)\right)$ converge absolument.

Finalement la série $\left(\sum u_n(z)\right)$ converge si et seulement si $z \in \Omega$.
5.2) Séparons les indices paires et impaires dans la somme suivante :

$u(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\pi n^2(z+1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \exp(i\pi n^2 z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\pi 4n^2 z) - \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\pi(2n-1)^2 z)$

$u(z+1) = u(4z) - u(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\pi 4n^2 z)$. D'où : $\forall z \in \Omega$;

$u(z+1) + u(z) = 2u(4z)$.

5.3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, on pose :
$\tilde{u}_n(x,y) = u_n(x+iy)$ et $\tilde{u}(x,y) = u(x+iy)$.

5.3.1) Soient $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times [a,+\infty[$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\left|n^k \tilde{u}_n(x,y)\right| = n^k \exp(-\pi n^2 y) \leq n^k \exp(-\pi n^2 a)$.
$n^k \exp(-\pi n^2 a) = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors la série $\left(\sum n^k \exp(-\pi n^2 a)\right)$ converge et par suite la série
$\left(\sum_{n\geq 1} n^k \tilde{u}_n\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

5.3.2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\tilde{u}_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
En effet : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$; $\tilde{u}_n(x,y) = \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x)$.
$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,y) = i\pi n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x)$ et $\left|\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,y)\right| = \pi n^2 \exp(-\pi n^2 y)$.
La série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,y)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.
D'où en appliquant à y fixé le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, la fonction $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y)$
existe en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, avec $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y) = i\pi \sum_{n\geq 1} n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x)$.

5.3.3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\tilde{u}_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
En effet : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$; $\tilde{u}_n(x,y) = \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x)$.
$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}(x,y) = -\pi n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x)$ et $\left|\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x,y)\right| = \pi n^2 \exp(-\pi n^2 y)$.
La série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}(x,y)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.
D'où en appliquant à x fixé le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, la fonction $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x,y)$

existe en tout point de $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, avec $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x,y) = -\pi \sum_{n\geq 1} n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x) = i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y)$.

5.3.4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$; $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y) = i\pi \sum_{n\geq 1} n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x)$.
Cette série converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, et pour tout $n \geq 1$, la

fonction $\left[(x,y) \longmapsto n^2\exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x)\right]$ est continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
$\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x}$ est donc continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et d'aprés la question précèdente, $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial y}$ est aussi continue
sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$, alors $\tilde{u}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et vérifie : $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial y}(x,y) = 0$

D'où u est holomorphe sur Ω.

5.4) Soit $z \in \Omega$, on a bien $\dfrac{i}{z} \notin \mathbb{R}^-$ car $\mathrm{Im}(z) > 0$.

(Dans cette question, une faute de frappe à l'énoncé, un signe - oublié)

$\left(\dfrac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}(1+2u(z)) = \left(\dfrac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+2\sum\limits_{n\geq 1}\exp(i\pi n^2 z)\right)$ et $1 + 2u(\dfrac{-1}{z}) = 1 + 2\sum\limits_{n\geq 1}\exp(\dfrac{-i\pi n^2}{z})$.

D'aprés la question précèdente :

$h(z) = \left(\dfrac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}(1+2u(z)) - (1+2u(\dfrac{-1}{z})) = \left(\dfrac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+2\sum\limits_{n\geq 1}\exp(i\pi n^2 z)\right) - \left(1+2\sum\limits_{n\geq 1}\exp(\dfrac{-i\pi n^2}{z})\right)$.

définit une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe par arcs Ω.

D'aprés la formule (2), si $z = ia$ avec $a > 0$, alors $h(z) = 0$.

D'où d'aprés le principe des zéros isolés, h est nulle Ω, ce qui établit :

$$\forall z \in \Omega \ ; \left(\frac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}(1+2u(z)) = 1 + 2u(\frac{-1}{z})$$

5.5) D'aprés 5.2), $u(z+1) + \dfrac{1}{2} = 2u(4z) - u(z) + \dfrac{1}{2} = (2u(4z)+1) - \dfrac{1}{2}(2u(z)+1)$.

Alors en appliquant la question précèdente :

$u(z+1) + \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{i}{4z}\right)^{\frac{1}{2}}(1+2u(\dfrac{-1}{4z})) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}}(1+2u(\dfrac{-1}{z}))$

$u(z+1) + \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(u(\dfrac{-1}{4z}) - u(\dfrac{-1}{z})\right) = \left(\dfrac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n\geq 1}\left(\exp(\dfrac{-i\pi n^2}{4z}) - \exp(-\right.$

5.6) $\forall n \geq 1$; $\forall z \in \mathbb{C}$; $\left[\mathrm{Im}(z) \geq 0 \Longrightarrow |u_n(z)| \leq 1 \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n(z)}{i\pi n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}\right]$.

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{u_n}{i\pi n^2}\right)$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

En plus : $\forall n \geq 1$; l'application $[z \longmapsto \dfrac{u_n(z)}{i\pi n^2}]$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

D'où $v(z) = \sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{u_n(z)}{i\pi n^2}\right)$ définit une application continue sur cet ensemble.

5.7) D'aprés 4.3.3) : $\forall z \in \Omega$; $\left|F_{-\frac{1}{2}}(z)\right| \leq 2|z|^{\frac{3}{2}}$. alors :

$\forall z\in\Omega$; $\forall\alpha>0$; $\forall n\geq 1$; $\dfrac{\alpha z}{\pi n^2}\in\Omega$ et donc : $\left|nF_{-\frac12}(\dfrac{\alpha z}{\pi n^2})\right|\leq 2n\left|\dfrac{\alpha z}{\pi n^2}\right|^{\frac32}=\dfrac{2}{n^2}(\dfrac{\alpha|z|}{\pi})^{\frac32}$.

$\forall z\in\Omega$; $\forall\alpha>0$; $\forall n\geq 1$; La série $\left(\sum_{n\geq1}nF_{-\frac12}(\dfrac{\alpha z}{\pi n^2})\right)$ converge absolument, donc converge.

5.8) Pour tout $z\in\Omega$, on pose :

$v_1(z)=\sum_{n\geq1}\dfrac{u_n(z)}{i\pi n^2}$ et $w(z)=\dfrac{(i\pi)^{\frac12}}{2}\sum_{n\geq1}\left(nF_{-\frac12}(\dfrac{4z}{\pi n^2})-2nF_{-\frac12}(\dfrac{z}{\pi n^2})\right)$.

5.8.1) On reprend un raisonnement identique à celui de 5.3) pour établir que v_1 est holomorphe sur Ω.

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times]0,+\infty[$; $v_1'(x+iy)=\dfrac{\partial\widetilde{v}_1}{\partial x}(x,y)=\sum_{n\geq1}\dfrac{1}{i\pi n^2}\dfrac{\partial\widetilde{u}_n}{\partial x}(x,y)=\sum_{n\geq1}\widetilde{u}_n(x,y)=u(x+iy)$.

D'où : $\forall z\in\Omega$; $v_1'(z)=u(z)$, c'est à dire : $v_1'=u$.

5.8.2) Vu ce qui est admis dans l'énoncé : pour tout $z\in\Omega$, on a :

$w'(z)=\dfrac{(i\pi)^{\frac12}}{2}\sum_{n\geq1}\left(\dfrac{4}{\pi n}F'_{-\frac12}(\dfrac{4z}{\pi n^2})-\dfrac{2}{\pi n}F'_{-\frac12}(\dfrac{z}{\pi n^2})\right)$. Utilisons 4.3.1) :

$$w'(z)=\frac{(i\pi)^{\frac12}}{2}\sum_{n\geq1}\left(\frac{4}{\pi n}(\frac{4z}{\pi n^2})^{-\frac12}\exp(\frac{-i\pi n^2}{4z})-\frac{2}{\pi n}(\frac{z}{\pi n^2})^{-\frac12}\exp(\frac{-i\pi n^2}{z})\right).$$

$$w'(z)=\frac{(i\pi)^{\frac12}}{2}\sum_{n\geq1}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}z^{-\frac12}\exp(\frac{-i\pi n^2}{4z})-\frac{2}{\sqrt{\pi}}z^{-\frac12}\exp(\frac{-i\pi n^2}{z})\right).$$

$$w'(z)=\left(\frac{i}{z}\right)^{\frac12}\sum_{n\geq1}\left(\exp(\frac{-i\pi n^2}{4z})-\exp(\frac{-i\pi n^2}{z})\right)=u(1+z)+\frac12.$$

(selon 5.5)

5.8.3) Posons : $\forall z\in\Omega$; $w_1(z)=v_1(z+1)-v(1)$. w_1 est holomorphe sur l'ouvert connexe par arcs Ω, et $\forall z\in\Omega$; $w_1'(z)=v_1'(z+1)=u(z+1)=w'(z)-\dfrac12$.

Alors l'application $[z\longmapsto w_1(z)-w(z)+\dfrac{z}{2}]$ est constante sur Ω.

D'aprés 4.3.3) la série $\sum_{n\geq1}\left(nF_{-\frac12}(\dfrac{4z}{\pi n^2})-2nF_{-\frac12}(\dfrac{z}{\pi n^2})\right)$ converge normalement pour $z\in\Omega$, $|z|\leq1$, on peut alors intervertir les signe $\sum_{n\geq1}$ et $\lim_{\substack{z\to0\\ z\in\Omega}}$, la constante cherchée est alors nulle !

D'où : $\forall z\in\Omega$; $w_1(z)-w(z)+\dfrac{z}{2}=0$; c'est à dire :

$$\forall z\in\Omega\ ;\ v_1(z+1)-v(1)=-\frac{z}{2}+\frac{(i\pi)^{\frac12}}{2}\sum_{n\geq1}\left(nF_{-\frac12}(\frac{4z}{\pi n^2})-2nF_{-\frac12}(\frac{z}{\pi n^2})\right)$$

5.9) D'aprés la question précèdente, pour tout $z\in\Omega$, on a :

$$\left|v(z+1)-v(1)+\frac{z}{2}\right|=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left|\sum_{n\geq1}\left(nF_{-\frac12}(\frac{4z}{\pi n^2})-2nF_{-\frac12}(\frac{z}{\pi n^2})\right)\right|.$$

et selon 4.3.3), $\forall n\geq1$; $\left|nF_{-\frac12}(\dfrac{4z}{\pi n^2})-2nF_{-\frac12}(\dfrac{z}{\pi n^2})\right|\leq 2n\left|\dfrac{4z}{\pi n^2}\right|^{\frac32}+4n\left|\dfrac{z}{\pi n^2}\right|^{\frac32}=|z|^{\frac32}\dfrac{\theta}{n^2}$.

où θ est un réel strictement positif indépendant de z.

On pose alors : $c = \dfrac{\theta\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2} \in \mathbb{R}^{*+}$. $\forall z \in \Omega$; $\left|v(z+1)-v(1)+\dfrac{z}{2}\right| \leq c\,|z|^{\frac{3}{2}}$.

5.10) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, d'aprés la question précèdente : $\left|v(x+iy+1)-v(1)+\dfrac{x+iy}{2}\right| \leq c\,|x+iy|^{\frac{3}{2}}$. On applique 5.6), on fixe x, et on fait tendre y vers 0.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left|q(x+1)-q(1)+\dfrac{x}{2}\right| \leq c\,|x|^{\frac{3}{2}}$, d'où $\left(q(x+1)-q(1)+\dfrac{x}{2}\right) = \underset{x\to 0}{O}\left(|x|^{\frac{3}{2}}\right)$.

Finalement : $q(x+1) = q(1) - \dfrac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

On déduit alors que q est dérivable en 1 et $q'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

Fin

Á la prochaine