Problèmes Corrigés MP

Corrigé Devoir Libre

Résolution d'une équation différentielle

Corrigé Pr. Taibi, CPGE Rabat

Partie I

1. L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ pour tout réel x .

   a. On a : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$, donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement $1-x<1$ soit $x>0$.

   b. On a aussi $t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$, donc $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

2. L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(z-1)\ln(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et que pour tout $t>0$, $\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1}$, donc par la question 1°), l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\Re(z)>0$.

3. Quelques formules utiles :

   a. Les applications $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classes C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $z \in C$ tel que $\Re(z)>0$, on a : $\left|e^{-t}t^z\right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. On applique alors une intégration par parties à l'intégrale $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-z-1}dt$:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-z-1}dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_{t=0}^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)$$ pour tout z tel que $\Re(z)>0$

   b. Pour tout $z \in C$ tel que $\Re(z)>0$ et tout $p \in N^*$, on a : $\Gamma(z+p) = \Gamma((z+p-1)+1) = (z-p-1)\Gamma(z-p-1)$.
   D'où : $\prod_{k=1}^{p}\Gamma(z+k) = \prod_{k=1}^{p}(z-k-1)\Gamma(z-k-1) = \prod_{k=1}^{p-1}(z-k)\prod_{k=1}^{p-1}\Gamma(z-k)$ et par suite :

$$\Gamma(z+p) = \prod_{k=1}^{p-1}(z-k)\Gamma(z)$$

   On prend $z=\alpha+1$, on a : $\Re(z) = \Re(\alpha+1) = \Re(\alpha)+$

$1 > 0$ et par suite

$$\Gamma(\alpha+1+p) = \gamma(\alpha+1)\prod_{k=1}^{p-1}(\alpha+1+k) = \Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)...(\alpha+p)$$

c. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive, donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt > 0$.

d. Par un simple calcul, on a $\Gamma(1) = 1$ et par $b)$ pour $\alpha = 0$, $p = n$, on a ::

$$\Gamma(n+1) = \prod_{k=1}^{n} k = n!$$

4. Développement en série de Γ.

a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a : $\Gamma(z) = \int_{]0,1[} t^{z-1}e^{-t}dt + \int_{[1,+\infty[} t^{x-1}e^{-t}dt$

Ecrivons $e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n$, on a alors : $t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}$

Si l'on pose $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}$ pour $t \in]0,1]$, on a : f_n est intégrable sur $]0,1]$ pour tout entier naturel n et que $\int_{]0,1]}|f_n(t)|\,dt \leqslant \int_{]0,1]}\frac{1}{n!}dt = \frac{1}{n!}$ et puisque la série $\sum\frac{1}{n!}$ converge, il en résulte par le théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{z+n-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

b. Posons $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ (fraction rationnelle en z)
pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|f_n(z)| = \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+z|} \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+\Re(z)|}$ car $|n+\Re(z)| \leqslant |n+z|$, donc $\sum f_n(z)$ converge absolument et par suite $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.
Soit K un compact inclu dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, et $\alpha = d(Z^-, K)$, on a $\alpha > 0$ car $\mathbb{Z}^-$ fermé et K compact. On a alors pour tout $z \in K$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $|n+z| = d(-n,z) \geqslant \alpha$, donc $|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+z|} \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{\alpha}$. Comme la série $\sum\frac{1}{n!}$ converge, il en résulte que $\sum f_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, donc par le théorème de continuité la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

On peut aussi montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ en effet : Comme $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ est un ouvert, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, il existe $r > 0$ tel $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, on prend alors le compact $K = \overline{B}(z_0, \alpha)$ et on termine comme avant .

5. Soit $0 < a < b$ et $t > 0$, on a : $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$.

   a. Si $t \in]0,1]$,, alors $\ln(t) \leqslant 0$, donc $(a-1)\ln(t) \geqslant (b-1)\ln(t)$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit que $t^{a-1} \geqslant t^{b-1}$. Soit $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.
   Si $t > 1$, alors $\ln(t) > 0$, donc $t^{a-1} < t^{b-1}$*et* par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.
   Conclusion finale : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :
   $$\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}.$$

   b. Pour $t \in]0,1]$, on a d'après a) $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$
   de même si $t > 1$, on a : $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$
   En conclusion : $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0, +\infty[$

   c. La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

   L'application $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{d}{dx}f(x,t) = \ln(t)f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
   De plus pour tout compact $K = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x,t) \in K \times \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|\frac{d}{dx}f(x,t)\right| \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}t^{x-1} \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ et que la fonction $\varphi : t \mapsto |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\sqrt{t}\varphi(t) = \sqrt{t}(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}|\ln(t)| \underset{t\to 0^+}{\to} 0$. Pour $t \geqslant 1$, $\varphi(t) \leqslant (t^{a-1} + t^{b-1})te^{-t} = (t^a + t^b)e^{-t}$.
   Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, il en résulte que Γ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ et que
   $$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}f(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

   d. On a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et comme Γ est continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc
   $$\Gamma(x) \sim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

Partie II :

$\lambda > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad y_\alpha(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+\alpha}$

   a. $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation (F_λ) .

   L'application $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur R_+^* et que $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]0, R[$ (somme d'une série entière), donc y_α est de classe C^∞ sur $]0, R[$ (produit de fonctions de classes C^∞).
   Par calculs : $y_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n-1}$
   $y_\alpha''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n-2}$
   Donc

y_α est solution sur $]0,R[$ de (F_λ) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in]0,R[,\ -(x^2+\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in]0,R[$ $\sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{\alpha+n} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in]0,R[$ $\sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_n x^{n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n} = 0$ car $x^\alpha \neq 0$

:

On fait tendre x vers 0^+, obtenir $\alpha^2-\lambda^2 = 0$ car $a_0 \neq 0$ et puis $((\alpha+1)^2-\lambda^2)a_1 = 0$ et une recurrence $((\alpha+n)^2-\lambda^2)a_n = a_{n-2}$..

b. $\alpha=\lambda$, $a_0 \neq 0$ et y_λ est solution sur $]0,R[$ de (F_λ) .

i. On a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On sait que (1) $((\lambda+n)^2-\lambda^2)a_n = a_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$ Puisque . $(\lambda+1)^2-\lambda^2 \neq 0$, on a $a_1 = 0$ et par la relation (1), on a : $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ .et $a_{2p} = \frac{1}{(\lambda+2p)^2-\lambda^2}a_{2(p-1)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\prod_{k=1}^{p} a_{2k} = \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}\prod_{k=1}^{p} a_{2(k-1)} = \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}\prod_{k=0}^{p-1} a_{2k}$ soit : $a_{2p} = \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}a_0$.

Mais $(\lambda+2k)^2-\lambda^2 = 4\lambda k + 4k^2 = 4k(\lambda+k)$, d'où $\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2} = \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{4k(\lambda+k)} = \frac{1}{4^p p!}\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{\lambda+k} = \frac{1}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$.

En conclusion :

$\forall p \in \mathbb{N},\quad a_{2p} = \frac{a_0}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$

ii. Pour $x \neq 0$, on a : $\left|\frac{a_{2p}x^{2p}}{a_{2(p-1)}x^{2(p-1)}}\right| = \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}}x^2 = \frac{1}{(\lambda+2p)^2+\lambda^2}x^2 \underset{p\to+\infty}{\to} 0$, donc le rayon de convergence R est infini .

iii. On suppose $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$.

On a : $\forall x > 0,\quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p+\lambda}$

$= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_0}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}x^{2p+\lambda}$

$= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_0}{p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p+\lambda}2^\lambda$

$= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p+\lambda}$ car a_0

Equivalent au voisinage de 0 :

D'après les propriétés des séries entières, on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Donc

$$y_\lambda(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$$

c. On suppose ici que $2\lambda \notin \mathbb{N}$.

i. D'après la question 1 et 2) la fonction $y_{-\lambda}$ est aussi solution sur R_+^* de (F_λ) .

ii. Montrons $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions sur R_+^* de (F_λ) .
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} = 0$.
Comme $y_\lambda(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}$, on a : $y_\lambda(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, donc si l'on suppose $\alpha\neq 0$, alors en faisant tendre x vers 0, on aboutit à une contradiction.
On conclut que $\alpha = 0$ et puis $\beta = 0$, donc les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes .
(F_λ) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et sans second membre, son ensemble de solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension deux. En conséquence : ($y_\lambda, y_{-\lambda}$) est un système fondamental de solutions de (F_λ) et que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_λ) est de la forme :

$$y = \alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} \quad \text{où} \quad \alpha,\beta\in R$$

Partie III.

A- Etude de (F_0) :

Pour $x>0$, on a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^p p!)^2} x^{2p}$.

a. .

i. Pour tout entier $k \geq 1$: $\prod_{k=1}^{p} a_{2k}(\alpha) = \prod_{k1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2} \prod_{k=1}^{p} a_{2(k-1)}$, donc $a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2} a_0(\alpha)$.
Or $a_0(\alpha)=1$, d'où la formule cherchée :

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2} \text{ pour tout } p\geq 1.$$

ii. D'après les notations de l'enoncé, pour tout $p\in N^*$, on a : $a_{2p}(\alpha) = \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \ln\left(\frac{1}{(\alpha+2k)^2}\right)\right) = \exp\left(-2\sum_{k=1}^{p}\ln(\alpha+2k)\right)$, donc : $a'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^{p}\frac{2}{\alpha+2k} a_{2p}(\alpha)$ et puis

$$\begin{aligned} a'_{2p}(0) &= -2\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}a_{2p}(0)\\ &= -\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}a_{2p}(0)\\ &= -H_p.a_{2p}(0)\end{aligned}$$

Or $a_{2p}(0) = \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} = \left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2$, donc :

$$b_p = a'_{2p}(0) = -\left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2 H_p$$

iii. Calcul du rayon de convergence R_b :

On a $b_p \underset{p\to\infty}{\sim} -\frac{1}{(2^p p!)^2}\ln(p) = o(\frac{1}{2^p p!})$ car $H_p \sim \ln(p)$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum b_p x^p$ est infini :

$$R_b = +\infty$$

b. .

i. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned}(2p)^2 b_p + 4pa_{2p}(0) &= -(2p)^2 a_{2p}(0) + 4pa_p(0)\\ &= a_{2p}(0)\left(-(2p)^2 H_p + 4p\right)\end{aligned}$$

.

Mais $(2p)^2 a_{2p}(0) = a_{2(p-1)}(0)$, donc :

$$\begin{aligned}(2p)^2 b_p + 4pa_{2p}(0) &= -a_{2p}(0)H_p + 4pa_{2p}(0)\\ &= -a_{2(p-1)}(0)H_{p-1} \underbrace{-\frac{1}{p}a_{2(p-1)}(0) + 4pa_{2p}(0)}_{=0}\\ &= b_{p-1}\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé .

ii. L'application $x \mapsto y_0(x)\ln(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (Opérations), donc z_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$z_0(x) = y_0(x)\ln(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p}$$

$$z'_0(x) = \frac{1}{x}y_0(x) + \ln(x).y'_0(x) + 2\sum_{p=1}^{\infty} p b_p x^{2p-1}$$

$$z''_0(x) = -\frac{1}{x^2}y_0(x) + \frac{2}{x}y'_0(x) + \ln(x).y''_0(x) + 2\sum_{p=1}^{\infty} p(2p-1)b_p x^{2p-2}$$

Donc
$$\begin{aligned}x^2 z''_0(x) + xz'_0(x) - (x^2+0)z_0(x) &= -y_0(x) + 2xy'_0(\\ &\quad +y_0(x) + \ln(x\\ &\quad -x^2\ln(x)y\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que y_0 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) et de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}x^2 z''_0(x) + xz'_0(x) - (x^2+0)z_0(x) &= 2xy'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p(2p)^2\\ &= \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} 4pa_{2p}(0)x^{2p} + \sum_{p=1}^{\infty}}_{\sum_{p=1}^{\infty} b_{p-1}x^{2p}}\end{aligned}$$

car $xy'_0(x$

$$= b_0 x^2 = 0$$

Ce qui permet de conclure .

c. Comme $y_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(0+1)}(\frac{x}{2})^0 = 1$, $\lim_{x\to 0}\sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p} = 0$ et $\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$, on a :

$z_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$.
ceci permet de prouver (comme à la question II 3.b) que les solutions y_0 et z_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) sont linéairement indépendantes .et avec les mêmes raisons que dans $III.3b$), toute solution de (F_0) est de la forme : $y = \alpha y_0 + \beta z_0$ où α, β sont des constantes réelles arbitraires .

B- Etude de (F_1) :

a. .

i. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $c_{2p}(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha+2p)^2-1}c_{2(p-1)}$, donc $\prod_{k=1}^{p} c_{2k}(\alpha) = \prod_{k=}^{p} \dfrac{1}{(\alpha+2k)^2-1} \prod_{k=1}^{p} c_{2(k-1)}$ et par suite $c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=}^{p} \dfrac{1}{(\alpha+2k)^2-1} c_0(\alpha)$.
et comme $c_0(\alpha) = 1$, on déduite que :

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2-1}$$

ii. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $d_p = \dfrac{d}{d\alpha}c_{2p}(1)$. Comme $c_{2p}(\alpha) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{p} \ln((\alpha+2k)^2-1\right)$, on a : $c'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^{p} \dfrac{2(\alpha+2k)}{(\alpha+2k)^2-1}c_{2p}(\alpha)$. D'où

$$d_p = -\sum_{k=1}^{p} \frac{2(1+2k)}{(1+2k)^2-1} \prod_{k=}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2-1} = -\sum_{k=1}^{p} \frac{2(1+2k)}{4k(1+k)} \prod_{k=}^{p} \frac{1}{(1+2k)^2-1}.$$

Or $\prod_{k=}^{p} \dfrac{1}{(1+2k)^2-1} = \prod_{k=}^{p} \dfrac{1}{4k(1+k)} = \dfrac{1}{2^{2p}} \prod_{k=}^{p} \dfrac{1}{k(1+k)} = 2$

, $\dfrac{2(1+2k)}{4k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} +\right.$

donc $\sum_{k=1}^{p} \dfrac{2(1+2k)}{4k(k+1)} = \dfrac{1}{2}(H_p + H_{p+1} - 1)$. D'où le résultat demandé :

$$d_p = \frac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)}(H_p + H_{p+1} - 1)$$

iii. On a :

$$d_p = \frac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)}(H_p + H_{p+1} - 1) = \frac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)!}\left(2H_p + \frac{1}{p+1} - 1\right) \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p!(p+1)!}\ln(p),$$

donc le rayon de convergence demandé :

$$R_d = +\infty$$

b. .

i. On a : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\left((1+2p)^2-1\right) d_p + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$. En effet :
par dérivation de l'identité $c_{2p}(\alpha)\left((1+2p)^2-1\right) = c_{2(p-1)}(\alpha)$, on a : $c'_{2p}(\alpha)\left((\alpha+2p)^2-1\right) + 2(\alpha +$

$2p)c_{2p}(\alpha) = c'_{2(p-1)}(\alpha)$

Pour $\alpha = 1$, on a :

$$d_p((1+2p)^2 - 1) + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$$

ii. Il est clair que les fonctions y_1 et $x \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^{2p+1}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation on obtient pout tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
x^2u_1''(x) + xu_1'(x) - (1+x^2)u_1(x) &= x^2\left(2y_1'(x)\ln(x) + \frac{4}{x}y_1'(x) - \frac{2}{x^2}y_1(x) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p+1)d_p x^{2p-1}\right) \\
&\quad + x\left(2y_1'(x)\ln(x) + \frac{2}{x}y_1(x) + \sum_{p=1}^{\infty}(2p+1)d_p x^{2p}\right) \\
&\quad -(1+x^2)\left(2y_1(x)\ln(x) + \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1}\right) \\
&= 2\ln(x)\left(x^2y_1''(x) + xy_1'(x) - (1+x^2)y_1(x)\right) + 4xy_1'(x) \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2 d_p x^{2p+1} - (1+x^2)\sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1}
\end{aligned}$$

Comme y_1 est xsolution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1), on a : $x^2y_1''(x) + xy_1'(x) - (1+x^2)y_1(x) = 0$ et donc

$$\begin{aligned}
x^2u_1''(x) + xu_1'(x) - (1+x^2)u_1(x) &= 4xy_1'(x) + \sum_{p=0}^{\infty}(2p+1 \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4(2p+1)}{p!(p+1)!2^{2p+1}}x^2 \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\infty} d_p x \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{p!(p+1)!2^{2p}}}_{=c_{2p}(1)} \frac{4(2p}{} \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2 - \\
&= \sum_{p=1}^{\infty}\Big(2(2p+1)c_{2p}(1) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

On déduit alors que u_1 est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1).

c.

i. On pose $u_1(x) = \frac{e_0}{x} + \sum_{p=1}^{\infty} e_p x^{p-1}$ avec $R = Rcv\left(\sum e_p x^p\right) > 0$.

Sur $]0, R[$, on a : $x^2u_1''(x) + xu_1'(x) - (1+x^2)u_1(x) - 2x = x^2\left(\frac{2e_0}{x^3} + \sum_{p=1}^{\infty}(p-1)(p-2)e_p x^{p-2}\right) +$

$x\left(\dfrac{-e_0}{x^2}+\sum_{p=1}^{\infty}(p-1)e_p x^{p-2}\right)-2x = \sum_{p=0}^{\infty}(p(p-1)e_p - e_{p-2})x^{p-1} - (e_0+2)x - e_1 = 0.$ comme dans la question ...., on déduit : $\begin{cases} e_0=-2 \\ e_1=0 \\ \forall p\geqslant 3,\ p(p-2)e_p-e_{p-1}=0 \end{cases}$, ce qui permet de conclure par une récurrence que : $\forall p \in N$, $e_{2p+1}=0$ et $e_{2p}=\dfrac{e_0}{2^{2p}p!(p+1)!=-2c_{2p}(1)}$ car $e_0=-2$ et par suite R est infini et que u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1).

ii. (F_1) est une équation différentielle linéaire sans second membre associée à (E_1) et comme z_1 et u_1 sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1), il en résulte que z_1-u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) .

d. Comme dans la question....., en étudiant le comportement des solutions z_1 et y_1 au voisinage de 0^+, on déduit que (y_1,z_1) est système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1), donc toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) est de la forme : $y : x\mapsto \alpha y_1(x)+\beta z_1(x)$ où α et β sont des constantes réelles arbitraires .