C54B

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°23

Séries entières
DSE et Equa. Diff
la Fonction Gamma

CC

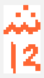
MP-CPGE Rabat

Epreuve de Mathématiques B MP

Blague du jour

Un polytechnicien (ou un centralien, voire pire : un normalien) passe un entretien d'embauche : Bien monsieur, demande le patron, j'aimerais que vous comptiez jusqu'à dix.
- Si vous voulez. Mais dans quelle corps dois-je compter ?
- Ben vous comptez, voilà !
- Oui, mais dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^*$? Doit-on considérer ce corps comme commutatif ou pas ? La loi de composition interne est-elle $+$ ou $.$?

Al-Qalasadi (1412(al-Andalus)-1486(Tunisie))

de son nom complet Abou Al Hassan ibn Ali ibn Muhammad al-Qalasadi. Son innovation au symbolisme algébrique est d'utiliser des lettres en mathématiques. L'inconnue dans une équation est appelée la chose (chay). $12x$ s'écrivait , $6x^2$: , $\sqrt{7}$: , $\sqrt{9}=3$: 
Al-Qalasadi a écrit plusieurs livres sur l'arithmétique et un sur l'algèbre. Son important traité s'appelle Al-Tabsira fi'lm al-hisab (Éclaircissement de la science de l'arithmétique).

Mathématicien du jour

Exercice 1

1 Problème 1 : e3a 2004, MP

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 1 \qquad (E)$$

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

1. Montrer que g est impaire.
2. Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire en fonction de g toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Soit $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ une solution développable en série entière de l'équation différentielle (E).

.

(a) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\forall i \geq 0, \quad (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

(b) Déterminer a_1. Expliciter les coefficients a_{2i+1} pour $i \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par la valeur de a_0, et exprimer les coefficients a_{2i}, pour tout $i \in \mathbb{N}$, en fonction de a_0.

(d) Réciproquement, on considère une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall i \geq 0, \quad (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

(e) Expliciter le développement en série entière de g.

5. On considère les fonctions g_1 et g_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g_1(x) = e^{-x^2} \text{ et } g_2(x) = \int_0^x e^{t^2} dt.$$

(a) Expliciter le développement en série entière des fonctions g_1 et g_2.

(b) En déduire le le développement en série entière de la fonction $g_1 g_2$ à l'aide d'un résultat dont on rappellera l'énoncé. En déduire la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2j+1} C_k^j = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On le munit du produit scalaire euclidien canonique $< \, , \, >$ et de la norme euclidienne associée $\| \;\; \|$, c'est à dire : pour tout $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$< v, w >= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \text{ et } \|v\| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

On remarquera que $< v, w >= (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

2 Problème 2 : CNC 2007, PSI

Définitions : Pour tout ce problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ par :

2

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0. \qquad (F_\lambda)$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions valeurs réelles.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes.

.

2.1 Partie I

1. Soit x un réel.

   a. Étudier, selon les valeurs de x, l'intégrabilité sur l'intervalle $]0,1]$ de la fonction

$$t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

   b. Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

2. À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$?

3. On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$, $z \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$.

   a) Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$; montrer que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

   b) En déduire, pour tout rel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité

$$\Gamma(\alpha+p+1) = (\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1).$$

   c) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

   d) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

4. Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

   Cette formule permet de prolonger la fonction Γ la partie $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ du plan complexe.

5. Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ et qu'elle y est continue.

6. Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

   a. Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t.

   b. Montrer que

$$\forall x \in [a,b], \quad 0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

   c. En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

2.2 Partie II

Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$.
Pour tout $x \in]0,R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

1 On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\alpha^2 = \lambda^2, \quad \left((\alpha+1)^2 - \lambda^2\right)a_1 = 0, \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 2,\ \left((\alpha+n)^2 - \lambda^2\right)a_n = a_{n-2}.$$

2 On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$.

a Montrer que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0\Gamma(\alpha+1)}{2^{2p}p!\Gamma(\alpha+p+1)}.$$

b Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

c Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$ alors

$$\forall\, x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda},$$

puis donner un équivalent de la fonction y_λ en 0.

3 On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)$ par $\dfrac{\Gamma(\alpha+p+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$ si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.

a En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(-\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

b Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

FIN

À la prochaine