Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°23

Séries entières

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Deux hommes se déplaçant en ballon sont perdus dans le désert. Ils aperçoivent un individu et lui demandent ≪ Où sommes-nous, s'il vous plaît ? ≫ Après un long moment de réflexion, l'homme leur répond : "Dans un ballon".
- Merci, monsieur le mathématicien.
- L'homme demande étonné : Comment avez-vous su que j'étais mathématicien ?
- Pour trois raisons, répondent les aéronautes. Premièrement, vous avez beaucoup réfléchi avant de nous répondre. Deuxièmement, votre réponse est très exacte. Troisièmement, elle ne sert à rien. ≫

Muhammad Aboûl-Wafâ, (940-998) à Bagdad

Mathématicien du jour

Astronome et mathématicien musulman principalement connu pour ses apports en trigonométrie plane et en trigonométrie sphérique. Il s'intéresse aux mouvements de la lune pour préciser la différence de longitude entre les deux villes. On lui doit la notion de cercle trigonométrique, celles de sécante $1/\cos x$ et cosécante $1/\sin x$. On lui attribue aussi la démonstration de la formule des sinus dûe à Al-Battani. Il s'intéressa entre autre à la géométrie, arithmétique et optique.

1 Corrigé Problème I : Pr. Dufait

1 1Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = e^{-x^2}\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt = e^{-x^2}\int_0^{x} e^{u^2}(-du) = -g(x)$ en effectuant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale . Ainsi g est impaire .

2 2L'application $t \longmapsto e^{t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto \int_0^{-x} e^{t^2}\,dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x\,e^{-x^2}\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2x\,g(x) + 1$. Donc g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3 3L'équation (E) est une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$ qui admet donc, suivant le théorème de Cauchy, comme ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ un espace affine de direction l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(H) : y' + 2xy = 0$. Les solutions de (H) sur étant les fonctions $x \longrightarrow C\,e^{-x^2}$ où C est une constante réelle si on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$, complexe si on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$, on obtient que :
les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions $x \longrightarrow g(x) + C\,e^{-x^2}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

4 a Si $R>0$ et le rayon de convergence de $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ et $\forall x \in]-R,R[,\ y(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, on a

$$\forall x \in]-R,R[,\quad y'(x)+2x\,y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}x^i+2\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^{i+1}=a_1+\sum_{i=1}^{\infty}\Big((i+1)a_{i+1}+2a_{i-1}\Big)x^i$$

et si y est solution de (E) sur $]-R,R[$ alors $\forall i \geq 1,\ (i+1)a_{i+1}+2a_{i-1}=0$ soit $\forall i \geq 0,\ (i+2)a_{i+2}+2a_i =$

b ◇ On obtient aussi $a_1=1$.

◇ L'égalité du [a] donne $\forall i \geq 1,\ (2i+1)a_{2i+1}=-2a_{2i-1}$ donc $a_{2i+1}=\dfrac{-2}{2i+1}a_{2i-1}=\dfrac{-2}{2i+1}\dfrac{-2}{2i-1}\cdots\dfrac{-2}{3}$ c
par récurrence immédiate. Donc $\forall i \geq 0,\ a_{2i+1}=\dfrac{(-2)^i}{(2i+1)\cdot(2i-1)\cdots 3}=(-2)^i\dfrac{(2i)\cdots 2}{(2i+1)\cdot(2i)\cdots 3\cdot 2}$.Ceci
donne $\forall i \geq 0,\ a_{2i+1}=(-4)^i\dfrac{i!}{(2i+1)!}$.

c ◇ De même, $\forall i \geq 1,\ (2i)a_{2i}=-2a_{2i-2}$ donc $a_{2i}=\dfrac{-2}{2i}\dfrac{-2}{2}a_0$ donc $\forall i \geq 0,\ a_{2i}=\dfrac{(-1)^i}{i!}a_0$.

◇ Ainsi la sous-suite $(a_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ est uniquement définie par la valeur de a_0, tandis que la sous-suite $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ est connu explicitement donc la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est uniquement définie par la valeur de a_0 .

d Les calculs précédents montrent qu'on a, en général, pour une suite vérifiant la relation de récurrence, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^i}{i!}x^{2i}+a_1\sum\limits_{i=0}^{\infty}(-4)^i\dfrac{i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}=a_0\,y_0(x)+a_1\,y_1(x)$. La série entière y_0 est de rayon de convergence $+\infty$: c'est le développement de $x\mapsto e^{-x^2}$. Quant à la série entière y_1, on peut lui appliquer la règle de D'Alembert : $\dfrac{4^i i!}{(2i+1)!}\dfrac{(2i+3)!}{4^{i+1}(i+1)!}=\dfrac{(2i+3)(2i+2)}{4\,(i+1)}=i+\dfrac{3}{2}\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et donc elle est également de rayon de convergence $+\infty$. Comme combinaison linéaire de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$a pour rayon de convergence $R=+\infty$.

e Ainsi toutes les séries entières vérifiant la relation de récurrence précédente et la condition $a_1=1$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E). Comme, d'après le théorème de Cauchy, (E) admet une unique solution vérifiant la condition $y(0)=0$ et que g et $x\longmapsto\sum\limits_{i=0}^{\infty}(-4)^i\dfrac{i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}$ sont des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant cette condition, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}(-4)^i\dfrac{i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}$.

5 a ◇ On a $\forall x\in\mathbb{R},\ g_1(x)=e^{-x^2}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^i}{i!}x^{2i}$.◇ On a $\forall t\in\mathbb{R},\ e^{t^2}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{i!}t^{2i}$ donc $\forall x\in\mathbb{R},\ g_2(x)=\int_0^x e$

b ◇ En utilisant le fait que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente, on obtient le résultat suivant : si, pour $i=1,2,\ g_i$ est la somme d'une série entière sur $]-R_i,R_i[$ alors g_1g_2 est somme du produit de ces deux séries sur $]-R,R[$ avec $R=\min(R_1,R_2)$.

◇ On a donc,ici, $\forall x\in\mathbb{R},\ (g_1g_2)(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}\dfrac{1}{i!(2i+1)}\right)x^{2k+1}$.

◇ Or $g=g_1g_2$ donc, par unicité du développement en série entière, on obtient avec le résultat du [4.(e)],
$\forall k\in\mathbb{N},\ \sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}\dfrac{1}{i!(2i+1)}=(-4)^k\dfrac{k!}{(2k+1)!}$ soit $\dfrac{(-1)^k}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^i}{2i+1}\dfrac{k!}{(k-i)!i!}=(-4)^k\dfrac{k!}{(2k+1)!}$.On a donc bien $\forall k\in\mathbb{N},\quad \sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^i}{2i+1}C_k^i=\dfrac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!}$.

2 Corrigé Problème II : Pr. Chabchi

.

PARTIE I

1. Soit x un réel

   (a) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,1]$ et $t^{x-1}e^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ au $\mathcal{V}(0^+)$, donc elle est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$ càd $\boxed{x>0}$

   (b) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$, donc elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour toute valeur du réel x.

2. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si, elle l'est au $\mathcal{V}(0^+)$ et au $\mathcal{V}(+\infty)$. Selon la question1, cela est réalisé si et seulement $\boxed{x>0}$.

   Pour un complexe z, on a d'abord $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}$. Elle donc intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$ si et seulement si $\boxed{\mathrm{Re}(z)>0}$.

3. Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z)>0$, on note $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$

   (a) A l'aide d'une intégration par partie, on a $\Gamma(z+1) = \displaystyle\lim_{(A,B)\longrightarrow(0^+,+\infty)} \left(\left[-e^{-t}t^z\right]_A^B + z\int_A^B t^z e^{-t}dt \right) = z\Gamma(z)$.

   (b) Par récurrence sur p :

   - Pour $p=1$, on a $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$ c'est juste.
   - Soit $p \geq 1$, supposons le résultat vrai pour p, alors selon (a), on a $\Gamma(\alpha+p+2) = (\alpha+p+1)\Gamma(\alpha+p+1)$, on conclu alors à l'aide de l'hypothèse de récurrence. D'où le résultat.

   (c) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue non nulle sur $]0,+\infty[$, donc $\Gamma(x)>0$.

   (d) On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et puisque $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, par récurrence simple, on a $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   Pour $\mathrm{Re}(z)>0$, on a d'abord $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$, puis il s'agit d'une intégration terme à terme dans la première intégrale : En effet on a :

   - La série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$.
   - La fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{t}$ est continue sur $]0,1]$.
   - La série des intégrales des modules $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}\right| dt = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\frac{1}{n+\mathrm{Re}(z)}$ est convergente

   Le résultat en découle alors.

5. Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, alors son image par la valeur absolue $x \longmapsto |x|$ qui est continue est un segment de $\mathbb{R}$, il existe donc $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $0<\alpha\leq\beta$, $\forall\, x \in [c,d]$, $\alpha \leq |x| \leq \beta$, il vient que :

   - $\forall\, z \in B$, $\forall\, n \geq E(\beta)+1$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+x}\right| \leq \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{n-\beta}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n!}\frac{1}{n-\beta}$ est convergente, d'où la convergence normale, donc uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geq E(\beta)+1} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ sur le segment (donc aussi sur tout compact) de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

.

- Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $z \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

On conclut alors que $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=E(\beta)+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, puis il évident que la sommation finie $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{E(\beta)} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, d'où la continuité de $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

6. Soit $0 < a < b$.
   (a) Pour $t > 0$ fixé, la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour $t \geq 1$ et décroissante pour $t \leq 1$, il vient alors que
   $\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \begin{cases} t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \\ t^{b-1} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$.
   (b) Découle de la monotonie de la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ sur $[a, b]$, en utilisant le (a).
   (c) On devra vérifier les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale (formule de Leibniz)
   - D'abord la fonction $f : (x, t) \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et y est aussi continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$.
   - Pour $x \in [a, b]$, $t > 0$, on a $|f(x, t)| \leq e^{-t}\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \phi(t)$ avec :
     – ϕ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
     – Intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ car négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$
     – Intégrable au $\mathcal{V}(0^+)$ car équivalente à $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-a}}$ avec $1 - a < 1$
   - Pour $x \in [a, b]$, $t > 0$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq e^{-t}|\ln(t)|\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \psi(t)$ avec :
     – ψ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
     – Intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ car négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$
     – Intégrable au $\mathcal{V}(0^+)$ car équivalente à $t \longmapsto \dfrac{-\ln(t)}{t^{1-a}} = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ avec $1 - \dfrac{a}{2} < 1$

   Ainsi la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}t^{x-1}dt$.

PARTIE II

1. On sait que la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et se dérive infiniment sous le signe somme, en écrivant $y_\alpha(x) = x^\alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on en déduit que y_α est de classe C^∞ sur $]0, R[$ et se dérive terme à terme.
   y_α est solution de (F_λ) sur $]0, R[$ si et seulement si

$$x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1)\, a_n x^{n+\alpha-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} (n+\alpha)\, a_n x^{n+\alpha-1} - \left(x^2 + \lambda^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0$$

   Après avoir fait le changement $n' = n + 2$ dans la sommation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2+\alpha}$, il vient

$$x^\alpha \left(\left(\alpha^2 - \lambda^2\right) a_0 x^0 + \left((1+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_n - a_{n-2} \right) x^n \right) = 0$$

   ou encore après simplification par le terme non nul x^α,

$$\left(\alpha^2 - \lambda^2\right) a_0 x^0 + \left((1+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left((n+\alpha)^2 - \lambda^2\right) a_n - a_{n-2} \right) x^n \quad = \quad 0 \text{ pour tout } x \in]0, R[$$

(valable en aussi en 0)

A ce stade, on ne peut utiliser directement l'unicité d'un développement en série entière puisque $[0,R[$ n'est pas un voisinage de zéro! Soit alors $y\in\left]-\sqrt{R},\sqrt{R}\right[$, on a alors $y^2\in[0,R[$, donc

$$\left(\alpha^2-\lambda^2\right)a_0y^0+\left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1y^2+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)y^{2n}=0 \text{ pour tout } y\in\left]-\sqrt{R},\sqrt{R}\right[$$

Par unicité d'un DSE, et en tenant compte de $a_0\neq 0$, il vient $\begin{cases}\alpha^2=\lambda^2\\ \left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1=0\\ \forall\ n\geq 2,\ \left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)=0\end{cases}$.

2. On suppose $\alpha=\lambda\geq 0$ et $a_0\neq 0$.

   (a) Puisque $\alpha=\lambda\geq 0$, alors la relation $\left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1=0$ donne $a_1=0$, puis la relation $\forall\ n\geq 2,\ \left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)=0$ assure que $\forall\ p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0$.
   D'autres part $\forall\ p\geq 1,\ (2p+\alpha)^2-\alpha^2\neq 0$ car $\alpha\geq 0$, donc $a_{2p}=\dfrac{a_{2(p-1)}}{(2p+\alpha)^2-\alpha^2}=\dfrac{a_{2(p-1)}}{2^2p\,(p+\alpha)}$.
   Par récurrence sur $p\geq 1$, on aura $a_{2p}=\dfrac{a_0}{2^{2p}p!}\dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)}$. On conclut à l'aide de la question I-3-b.

   (b) On vu que pour tout $x>0$, $\Gamma(x)>0$, donc $a_{2p}\neq 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
   Pour z un complexe non nul, on note $u_p=\left|a_{2p}z^{2p}\right|$, alors
   $\displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty}\frac{u_{p+1}}{u_p}=\lim_{p\longrightarrow+\infty}|z|^2\frac{\Gamma(\alpha+p+1)}{2^2(p+1)\Gamma(\alpha+p+2)}=\lim_{p\longrightarrow+\infty}|z|^2\frac{1}{2^2(p+1)(\alpha+p+1)}=0<1$. D'où la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_nz^n=\sum_{p\geq 0}a_{2p}z^{2p}$ converge pour tout complexe z. Ainsi le rayon cherché est $+\infty$.

   (c) On suppose $a_0 2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)=0$, puisque $\Gamma(\lambda+1)>0$ car $\lambda+1>0$, alors $a_0=\dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}$. De plus le rayon de $\sum a_nz^n$ est infini, alors pour tout $x>0$,
   $$y_\lambda(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{\lambda}\Gamma(\lambda+1)}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{2^{2p}p!\Gamma(\lambda+p+1)}x^{2p+\lambda}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}.\text{ CQFD}$$
   On a aussi $y_\lambda(x)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\lambda}\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$, et or $x\longmapsto\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$ est continue en 0, donc
   $$\boxed{y_\lambda(x)\sim_0\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}}$$

3. On suppose que $2\lambda\notin\mathbb{N}$, soit $p\geq 1$.

   (a) Le fait que $2\lambda\notin\mathbb{N}$, assure que $\forall\ p\geq 1,\ (-\lambda+n)^2-\lambda^2\neq 0$, donc comme dans le 2-$(a)$, on trouve que :
   $\forall\ p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0$ et $a_{2p}=\dfrac{a_0}{2^{2p}p!}\dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)}$, puis en prenant comme le 2-(b) : $a_0 2^{-\lambda}\Gamma(-\lambda+1)=1$, puisque $-\lambda\notin\mathbb{Z}^{*-}$ (car sinon $2\lambda\in\mathbb{N}$), alors le fait de "noter" le produit non nul : $(-\lambda+p)(-\lambda+p+1)\ldots(-\lambda+1)$ par $\dfrac{\Gamma(-\lambda+p+1)}{\Gamma(-\lambda+1)}$, assure que $\Gamma(-\lambda+1)\neq 0$, donc
   $a_0=\dfrac{1}{2^{-\lambda}\Gamma(-\lambda+1)}$, on obtient que $x\longmapsto\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!\Gamma(-\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$ est aussi solution de (F_λ) sur $\mathbb{R}^{*+}$.

   (b) Il est à noter d'abord que $\lambda\neq 0$ car $2\lambda\notin\mathbb{N}$, puis comme dans le 3(c), on a $y_{-\lambda}(x)\sim_0\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\lambda}\dfrac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}$.
   Ainsi y_λ et $y_{-\lambda}$ ont des comportements non propotionnel au voisinage de zéro : l'une tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$, la famille $(y_\lambda,y_{-\lambda})$ est alors libre.
   D'autres part (F_λ) est une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre deux et dont les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^{*+}$ et aussi le coefficient de y'' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc l'espace des solutions de (F_λ) sur $\mathbb{R}^{*+}$ est $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, contenant la famille libre $(y_\lambda,y_{-\lambda})$, qui sera donc une base de cet espace. D'où la solution générale de (F_λ) sur $\mathbb{R}^{*+}$ est : $x\longmapsto Ay_\lambda(x)+By_{-\lambda}(x)$ où A et B sont des constantes réelles.