Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°24

Séries entières
Théorème de Stone-Weierstrass
Polynômes de Lebesgue

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

C'est un prof qui demande à ses prépas si tout le monde a bien compris ce que c'est que la sublimation. Aussi, pensant au glaçon qui passe à l'état de vapeur, il demande :
« Est-ce que vous pouvez me donner un exemple de solide qui se transforme en gaz sans passer par l'état liquide ? »
Et du fond de la classe quelqu'un lance : « Les cigarettes m'sieur ! »

Henri-Léon Lebesgue (1875-1941)

Mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée en 1902. Il se fera alors connaître par sa théorie de la mesure, laquelle prolonge les premiers travaux importants d'Émile Borel, l'un de ses professeurs et plus tard son ami. Il mit au point une théorie des fonctions mesurables qui lui permet de rechercher et de prouver l'existence de primitives pour des fonctions « irrégulières » et généralise des théories d'intégration antérieures : Riemann, Darboux, Stieltjes

Mathématicien du jour

Notations et rappels

Si α est un réel et n un entier naturel, on pose

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{si} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

On rappelle que si n et m sont des entiers naturels avec $n \leqslant m$, $\binom{m}{n}$ est le nombre de parties à n éléments d'un ensemble à m éléments.

1 A. Une relation entre coefficients binomiaux

1 Soient n et m deux entiers naturels avec $n \leqslant m$; montrer que $\sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p} = \binom{2m}{n}$.

On pourra considérer deux ensembles disjoints E et F ayant m éléments chacun, puis calculer de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments de $E \cup F$.

2 Soit n un entier naturel.

a Vérifier que l'application $\alpha \mapsto \binom{2\alpha}{n} - \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$ est polynomiale puis en donner des zéros.

b Montrer alors que pour tout réel α, $\binom{2\alpha}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.

2 B. Recherche d'un équivalent

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + w_n$ où $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable. Étudier la suite $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.

2. Soient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs et γ un réel tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \dfrac{\gamma}{n} + w'_n$ où $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable.
   - a. Étudier la suite $(n^\gamma b_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que $b_n \sim \dfrac{\ell}{n^\gamma}$.
   - b. Quelle est la nature de la série de terme général b_n ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = (-1)^{n-1}\dbinom{1/2}{n}$.
   - a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n-1}{2(n+1)}$.
   - b. Établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\dbinom{1/2}{n} \sim C\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.

3 C. Résultat d'approximation

1. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{1/2}{n}(-1)^n z^n$.

2. Montrer que cette série converge normalement sur le disque fermé de $\mathbb{C}$, de centre 0 et de rayon 1 ; sa somme sera notée $f(z)$ pour $|z| \leqslant 1$.

3. Montrer soigneusement que si $|z| \leqslant 1$ alors $f(z)^2 = 1 - z$.

4. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]-1, 1[$ et justifier soigneusement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis que $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in [-1, 1]$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{(2k-1)2^{2k}}(1-X^2)^k$ (n^{e} polynôme de Lebesgue).
   - a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dbinom{1/2}{n} = (-1)^{n-1}\dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{(2n-1)2^{2n}}$.
   - b. Vérifier que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|x| = f(1-x^2)$ et montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Lebesgue converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

FIN

À la prochaine