

CPGE My Youssef, Rabat



DL 12 Bis (09-10): *Séries entières*

8 février 2010

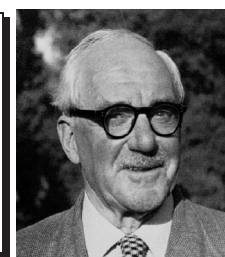
Blague du jour :

- Comment appelle t-on un chien sans pattes ? On ne l'appelle pas, on va le chercher !
- Un vieux rat rencontre une petite taupe. Curieux, il lui demande :
 - Que veux-tu faire plus tard, ma petite ?
 - Taupe-modèle !!

Mathématicien du jour

Littlewood

John Edensor Littlewood (1885-1977) était un mathématicien anglais. Il a surtout travaillé en analyse sur le sujet des fonctions entières. Il a collaboré pendant de nombreuses années avec Hardy et ils ont formulé ensemble deux conjectures. Il a aussi travaillé sur la théorie de Fourier. Il est lauréat de la Médaille Sylvester, de la Royal Medal et de la médaille Copley en 1958.



PROBLÈME :

Source : Concours CCP-MP, 2005.

Autour du théorème d'ABEL pour les séries entières

Dans tout le problème :

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.

On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur

l'intervalle $] -1, 1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :

$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.

$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière « usuels », donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :
 - a. (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
 - b. (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
 - c. (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
 - d. La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $] -1, 1[$ (justifier).
2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
3. *Exemple*

Déduire de la question précédente la somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

II. THÉORÈME D'ABEL

4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge.

On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).

On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

- a. Simplifier, pour tout $x \in [0, 1]$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.
- b. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1} (x-1) \sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.
- c. Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, puis que :
pour tout entier $n \geq n_0$ et pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|R_n(x)| \leq \varepsilon$.
- d. Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$?

6. *Exemple*

Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \arctan x$ puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\frac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. Application

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

a. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ?

(On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geq 1$).

b. Soit $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n, \sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

III. RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition (Q) à la condition (P_2) de telle sorte que si (a_n) vérifie (P_2) et (Q) , alors elle vérifie (P_1) .

9. On prend pour (Q) la propriété : pour tout entier n , $a_n \geq 0$.

Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés (P_2) et (Q) , alors elle vérifie la propriété (P_1)

(on pourra montrer que $\sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$).

Si on prend pour (Q) la propriété :

la suite (a_n) vérifie $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$),

on obtient le **théorème de Littlewood** dont on admettra la démonstration pour l'appliquer dans la partie suivante.

IV. SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

Désormais, on admet et on pourra utiliser le théorème de Littlewood :

si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que

$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}$.

10. Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n x^{n-1}$ et

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n.$$

On pose, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

11. Établir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f : x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

12. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

13. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et que la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

14. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^p \varepsilon_i$ pour que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

15. Exemple

Dans le cas où la suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est périodique de période 6 avec

$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = -1, \varepsilon_5 = -1, \varepsilon_6 = -1$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$

(il est demandé de détailler les calculs).

Fin
À la prochaine