# EPITA - Concours 2003 - Maths option

# - Corrigé -

Par David Yann VINCENT - david-yann.vincent@ac-rouen.fr

**1-a** $u_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$ ; $u_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = 2$

$u_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{\pi}{2}.$

**1-b** Soit $n \geq 1$. Les fonctions $t \longmapsto \cos^p(t)$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ donc on peut intégrer par parties:

$$(n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)dt = (n+1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \times \cos(t)dt = (n+1) \times n \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(t) - \cos^{n+1}(t)dt$$

d'où la relation: $(n+1)u_{n+1} = (n+1)nu_{n-1} - (n+1)nu_{n+1}$

soit

$$\forall n \geq 1, \qquad (n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$$

**1-c** D'après la relation précédente en multipliant chaque terme par $u_n$, on a l'égalité $(n+1)u_{n+1}u_n = nu_nu_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Donc la suite $((n+1)u_{n+1}u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

De plus, $1 \times u_1 \times u_0 = 2\pi$ et $2 \times u_2 \times u_1 = 2\pi$. On peut donc conclure que la suite $((n+1)u_{n+1}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $2\pi$.

**1-d** Pour tout $n \geq 0$, on a: $u_{n+1} - u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) - \cos^n(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(\cos(t)-1)dt$

Or la fonction $t \longmapsto \cos^n(t)(\cos(t)-1)$ est de signe négatif constant sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ car c'est le produit d'une fonction de signe constant positif et d'une fonction de signe constant négatif sur cet intervalle. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

D'une part, on a, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$ donc, en multipliant chaque terme par $(n+1)u_n$ (qui est positif car l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment est positive) et en utilisant le fait que la suite $((n+1)u_{n+1}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $2\pi$, on obtient l'inégalité: $2\pi \leq (n+1)u_n^2$.

D'autre part, on a, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq u_{n-1}$. De même que précédemment (en multipliant par $nu_n$), on obtient donc l'inégalité: $nu_n^2 \leq 2\pi$. Cette inégalité est encore valable si $n = 0$.

D'où la double inégalité:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad nu_n^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$$

**1-e** D'après la double inégalité précédente et comme $u_n$ est positif, on a la double inégalité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

Ainsi, on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (th. des gendarmes) et $u_n \sim \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}$ en $+\infty$.

**2-a** Par définition des $f_n$ et grâce à la relation de Chasles, l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n(x)dx$ est triviale.

En faisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(t)$, on a: $\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n(x)dx = \sqrt{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))^n \times \cos(t)dt$ d'où la relation demandée:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n(x)dx = \sqrt{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)dt$$

**2-b** On a donc: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx \sim \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1}}$ en $+\infty$ donc:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \sqrt{\pi}$$

**3-a** Si $x \in ]-\infty; -\sqrt{n}[\cup]\sqrt{n}; +\infty[$, $f_n(x) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Si $x \in [-\sqrt{n}; \sqrt{n}]$, on a: $(1-\dfrac{x^2}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{x^2}{n})} \sim e^{-n(\frac{x^2}{n}+\frac{x^4}{2n^2})}$ en $+\infty$. Donc $(1-\dfrac{x^2}{n})^n \longrightarrow e^{-x^2}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Finalement, on a:

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \in [-\sqrt{n}; \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

**3-b** L'énoncé comportait une erreur. Il fallait bien-sûr lire "pour tout nombre réel $u$ inférieur strictement à 1".
Considérons la fonction $\Phi : \begin{array}{ccl} ]-\infty; 1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u + \ln(1-u) \end{array}$.
Elle est continue et dérivable sur son ensemble de définition et on a $\Phi'(u) = \dfrac{u}{u-1}$. En étudiant $\Phi$, on montre alors aisément qu'elle est majorée par 0. On a donc:

$$\forall u \in ]-\infty; 1[, \qquad \ln(1-u) \leq -u$$

Pour $x \in ]-\infty; -\sqrt{n}[\cup]\sqrt{n}; +\infty[$, la définition de $f$ assure l'inégalité demandée.

Pour $x \in ]-\sqrt{n}; \sqrt{n}[$, $0 \leq \dfrac{x^2}{n} < 1$ et donc : $(1-\dfrac{x^2}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{x^2}{n})} \leq e^{-n\frac{x^2}{n}} = e^{-x^2}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $x = \pm\sqrt{n}$, on a: $f_n(x) = 0 \leq e^{-n}$.
Ainsi on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) \leq f(x)$$

**3-c** On rappellera l'énoncé du théorème en détaillant les hypothèses et la conclusion de celui-ci. Grâce aux résultats des questions 3-a et 3-b, on a:

- Pour tout $n$, $f_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
- $f_n$ converge simplement vers $f$ sur $\mathbb{R}$ et $f$ est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$
- Pour tout $n$, $|f_n| \leq f$ et $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

**3-d** D'après le résultat précédent et grâce au résultat de la question 2-b, on a donc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

**4-a** Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ car sinon on serait en contradiction avec le résultat établi en 1-c. On a donc: $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = |\frac{\frac{2\pi}{u_n(n+1)}}{u_n}| = \frac{2\pi}{u_n^2(n+1)} \sim \frac{n}{n+1}$ en $+\infty$. Donc on a: $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

On conclut donc que le rayon de convergence de S vaut 1.

**4-b**

- $u_n \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ en $+\infty$ qui est le terme général d'une série divergente (critère de Riemann). Donc $\sum u_n$ diverge.
- $u_n$ est de signe constant et décroit vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, $\sum(-1)^n u_n$ converge.

L'ensemble de définition $D$ de $S$ est donc:

$$D = [-1; 1[$$

**4-c** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$. On a:

$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(t)dt \times x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} (x\cos(t))^k dt.$

On reconnait la somme des $n$ premiers termes d'une série géométrique de raison $x\cos(t)$ et de premier terme 1 (remarquons que $x\cos(t) \neq 1$ car la seule possibilité serait avec $x = -1$ mais $\cos(t)$ n'est jamais négatif sur l'intervalle d'intégration). On a donc:

$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(x\cos(t))^n}{1-x\cos(t)} dt$ d'où la formule annoncée:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-x\cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)^n}{1-x\cos(t)} dt$$

**4-d** Distinguons les deux cas:

- Si $|x|<1$, on a: $|x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1-x\cos(t)} dt| \leq |x^n| \times \frac{1}{1-|x|} \times \pi$ et $|x^n| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ car $|x|<1$.

  Ainsi on a bien: $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-x\cos(t)}$ pour $|x|<1$.

- Si $x=-1$, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k(-1)^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos(t)} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^n}{1+\cos(t)} dt$. Or $|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos^n(t))}{1+\cos(t)} dt| \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ d'après 1-e. Finalement, on a: $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(-1)^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos(t)}$

**4-e** On a: $S(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(-1)^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\cos(t)} = [\tan(\frac{t}{2})]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

Pour $|x|<1$, on a: $S(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-x\cos(t)}$.

En faisant le changement de variable $u=\tan(t/2)$, on a: $S(x) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{(1-x)+(1+x)u^2} du$.

En faisant le changement de variable $v = u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, on a: $S(x) = \frac{2\sqrt{1-x}}{(1-x)\sqrt{1+x}} [\text{Arctan}(v)]_{-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$.

Finalement, on obtient pour tout $x$ tel que $|x|<1$:

$$S(x) = \frac{4\,\text{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{1-x^2}}$$