CCP Mathématiques I -Corrigé

par M. TAIBI   Lycée Moulay Youssef Rabat

Exercice 1 :

a. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a : $(x,y)\in T \Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$ et $-x\leqslant y\leqslant 1$, donc :
$\iint_T (x+y)dxdy = \int\limits_{-1}^{1}(\int_{-x}^{1}(x+y)dy)dx = \int\limits_{-1}^{1}((x+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2})dx = \frac{4}{3}$.

b. Posons $T'=-T$, et $f(x,y)=|x+y|$ pour $(x,y)\in C$, alors $C=T\cup T'$, f est continue sur C et $f(x,y)=0$ si $(x,y)\in T\cap T'$, donc $= \iint_T f(x,y)dxdy + \iint_{T'} f(x,y)dxdy$. Avec le changement de variable $\varphi : T\to T'$, $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ est un $\mathrm{C}^1 - \textit{difféomorphisme}$ de T sur T' de Jacobien 1, donc $\iint_{T'} f(x,y)dxdy = \iint_T f\circ\varphi(x,y)dxdy = \iint_T f(x,y)dxdy$ car $f\circ\varphi = f$.
En conclusion :
$$\iint_C f(x,y)dxdy = 2\iint_T f(x,y)dxdy = 2\frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Exercice 2 :

Soit l'équation différenielle linéaire du premier ordre, sans second membre : $(E_n)\quad xy'-ny=0\quad$ *où* n est un entier strictement positif.

1. Sur I (resp. J) l'équation différentielle (E_n) s'écrit : $y'-\frac{n}{x}y=0$ et la fonction $x\mapsto\dfrac{n}{x}$ est continue sur I (*resp.* sur J), ce qui montre que si $S_I(E_n)$ (resp. $\mathrm{S}_J(E_n)$) désigne l'ensembles des solutions de (E_n) sur I (*resp.* sur J) alors $S_I(E_n)$ (*resp.* $\mathrm{S}_J(E_n)$) est un espace vectoriel réel de dimension 1. L'application $x\mapsto x^n$ est solution de (E_n) sur I (resp sur J) donc : $S_I(E_n) = vect(I\to\mathbb{R}\ x\mapsto x^n)$ (resp . $S_J(E_n)=\mathrm{vect}(J\to\mathbb{R}\ x\mapsto x^n)$) .
2. Dans le cas où $n=1$, une solution y de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est aussi solution de (E_1) sur I et sur J , donc sa courbe est réunion de deux demi-droites, et comme y est C^1, sa courbe est donc une droite.
En conclusion : l'espace des solutions de $(E_1$) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 1, engendrée par la fonction $x\mapsto x$.
3. Supposons $n>1$, soit y une solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = \begin{cases}\alpha x^n & si\quad x\in I\\ \beta x^n & si\quad x\in J\end{cases}$. (voir question 1.) et donc $y(0)=0$
Réciproquement : toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x)=\begin{cases}\alpha x^n & si\quad x\in I\\ \beta x^n & si\quad x\in J\end{cases}$ avec $y(0)=0$, alors y est continue sur $\mathbb{R}$ car $n>1$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}} y'(x)=0$, donc le théorème de prologment de la dérivée, montre que y est C^1 sur R avec $y'(0)=0$ et y vérifie l'équation différentielle (E_n) .
Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_n) est un espace vectoriel de dimesion 2, engendré par les fontions : $h_n : x\mapsto \begin{cases}x^n & si\quad x\geqslant 0\\ 0 & si\quad x<0\end{cases}$ et $g_n : x\mapsto\begin{cases}x^n & si\quad x<0\\ 0 & si\quad x\geqslant 0\end{cases}$

Problème Autour du théorème d'Abel pour les séries entières .

I. Généralités

1. **Exemples**

   a. Exemple de suite (a_n) vérifiant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$:
   Soit (a_n) telle que $a_n=0$ et $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ alors (a_n) verifie $(\mathcal{P}_1)$ car la série harmonique alternée $\sum a_n$ converge et vérifie $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\ln(1+x)$ pour $|x|<1$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\ln(2)$.

b. Exemple de suite (a_n) qui ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$:

la suite (a_n) telle que : $a_n = (-1)^n$ ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ car $\sum a_n$ diverge et elle vérifie $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x}$ pour $|x| < 1$ et donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$.

c. Exemple de suite (a_n) qui ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$:
la suite (a_n) telle que :$a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ car $\sum a_n$ diverge (série harmonique)et elle ne vérifie pas $(\mathcal{P}_2)$ car $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = -\ln(1-x)$ pour $|x| < 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

d. Dans l'exemple *c.* la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence 1 et ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$, en effet si la série entière converge uniformément sur $]-1,1[$, alors par $\lim\limits_{x \to 1^-} a_n x^n = a_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et on aura la série $\sum a_n$ converge ce qui n'est pas possible . Donc la converge de la série entière $\sum a_n x^n$ ne peut-être uniforme .

2. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est absolument convergente. Soit $f_n : x \to a_n x^n$, alors par : $\forall x \in [0,1[, |f_n(x)| \leqslant |a_n|$ et que $\sum |a_n|$ converge, on a $\sum f_n$ converge normalement ,donc uniformément sur $[0,1[$ et puisque $\lim\limits_{x \to 1^-} f_n(x) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en résulte que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ exsite dans $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. **Exemple :**

Si l'on pose $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$, pour $n > 1$, on a alors $\sum a_n$ converge absolument ($|a_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$) et par la question précédente, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ existe et vaut $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Or $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} = \dfrac{(-1)^n}{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{n} = \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, donc , pour $x \in]0,1[$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n &&= \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-2}}{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\ & &&= (x+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - x \\ & &&= (x+1)\ln(1+x) - x \end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2\ln(2) - 1$ et puis $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n = 2\ln(2) - 1$

II. Théorème d'Abel

4. On suppose que la série $\sum a_n$ converge *et* on pose $r_n = \sum\limits_{n=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour $x \in [0;1]$, $R_n(x) = \sum\limits_{n=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

a. On sait que $a_k = r_{k-1} - r_k$ pour tout $k \geqslant 1$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $p \geqslant 1$, on a : $a_{n+p} = r_{n+p-1} - r_{n+p}$ et puis $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} a_{n+p} x^{n+p} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = R_n(x)$.

b. Pour $x \in [0;1[$ et $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $m > 2$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{m}(r_{n+p-1}-r_{n+p})x^{n+p} &= \sum_{p=1}^{m} r_{n+p-1}x^{n+p}-\sum_{p=1}^{m} r_{n+p}x^{n+p}\\ &= x\sum_{p=1}^{m} r_{n+p-1}x^{n+p-1}-\sum_{p=1}^{m} r_{n+p}x^{n+p}\\ &= xr_nx^n + x\sum_{p=2}^{m} r_{n+p-1}x^{n+p-1}-\sum_{p=1}^{m} r_{n+p}x^{n+p}\\ &= r_nx^{n+1}+x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{m-1} r_{n+p}x^{p-1}+r_{n+m}x^{n+m}\end{aligned}$$

et comme la suite $(x_{n+m})_m$ est bornée , que $r_{n+m} \underset{m\to+\infty}{\to} 0$, et que $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{p=1}^{m}(r_{n+p-1}-r_{n+p})x^{n+p} = R_n(x)$, il en résulte que $\sum\limits_{p\geqslant 1} r_{n+p}x^{p-1}$ converge et que :

$$\sum_{p=1}^{\infty}(r_{n+p-1}-r_{n+p})x^{n+p} = r_nx^{n+1}+x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{\infty} r_{n+p}x^{p-1}$$

c. Soit $\varepsilon>0$, comme $\lim r_n=0$, (reste d'une série convergente), il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que : $|r_n|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout entier $n\geqslant n_0$. Donc , pour tout entier naturel p et tout entier $n\geqslant n_0$, on a : $|r_{n+p}|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant n_0$, alors :

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1}-r_{n+p})x^{n+p}\right|\\ &= \left|r_nx^{n+1}+x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{\infty} r_{n+p}x^{p-1}\right|\\ &\leqslant |r_n|+(1-x)\sum_{p=1}^{\infty}|r_{n+p}|\,x^{p-1}\\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}+(1-x)\sum_{p=1}^{\infty}\tfrac{\varepsilon}{2}x^{p-1}=\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}(1-x)x\tfrac{1}{1-x}\\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

pour $x=1$, on a $|R_n(1)|=|r_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ dès que $n\geqslant n_0$.

Conclusion : $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\,;\ \forall n\in\mathbb{N}\ (\ n\geqslant n_0\Rightarrow \|R_n\|_{\infty,[0,1]}=\sup\limits_{x\in[0,1]}|R_n(x)|\leqslant\varepsilon\ )$.

d. D'après la question précédente, la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge unifomément vers la fonction nulle sur $[0;1]$, donc la série entière $\sum a_nx^n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et comme $x\mapsto a_nx^n$ est continue, il en résulte par le théorème de continuité de la limite uniforme, que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$.

5. On suppose que $\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$, on a alors $\sum a_n$ diverge car sinon, par 4.d), $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ serait finie .

6. **Exemple :**
$\frac{d}{dx}(\arctan)(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$ pour $|x|<1$, et par intégration, on a : $\arctan(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+C^{te}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ car $\arctan(0)=0$. Donc : $\forall x\in]-1;1[;\quad \arctan(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ avec $a_{2n}=0$ et $a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{2n+1}$.
La série $\sum a_n$ converge (série alternée varifiant le critère spécial). Par la question 4.), il en résulte que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim\limits_{x\to1^-}\arctan(x)=\frac{\pi}{4}$.

En conclusion :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

7. Application

   a. Soient les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_0 = v_0 = 0$ et $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geqslant 1$. Posons $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ pour $n \geqslant 0$, alors $c_0 = c_1 = 0$ et $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{k^{\frac{1}{4}}(n-k)^{\frac{1}{4}}} = (-1)^n \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geqslant 2$. Or pour $k \in [1, n-1]$, on a : $k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4}$, donc $|c_n| \geqslant \dfrac{n-1}{(\frac{n^2}{4})^{\frac{1}{4}}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et par suite $\sum c_n$ divrege (car son terme général ne tend pas vers 0).

   b. On considère les séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ associées rep. aus suites (u_n), (v_n) et (w_n). Commes les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors les rayons de convergence des séries entières associées sont au moins égaux à 1. Par le théorème d'Abel, on déuit : $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n$.
   Or pour $x \in]0;1[$, les séries numériques $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ convergent absolument et que pour tout $n \in N$, $w_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k x^k v_{n-k} x^{n-k}$, donc (d'après le cours sur le produit de Cauchy de deux séries entières) : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n x^n$, et par passage à la limte lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

III. Réciproque du thérème d'Abel .

8. La réciproque du théorème d'Abel est fausse , il suffit de prendre la suite ($a_n = (-1)^n$)
9. Soit $(a_n)_n$ une suite de reéls positifs telle la série entière associée est de rayon de convergence égal à 1 et que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.
   Soit $x \in]0,1[$, et $n \in \mathbb{N}$, on a alors : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \underbrace{\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k}_{\geqslant 0} \geqslant \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ (*). En faisant tendre x vers 1, on obient : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant \lim\limits_{x\to1^-} f(x) < +\infty$.
   Comme la série $\sum a_n$ est à termes positifs et que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est majorée, on en déduit que $\sum a_n$ converge .
   Dans la suite, on appliquera le théorème de Littlewood, sans démonstration .

IV. Séries harmoniques transformées

10. On rappelle que si $(a_n)_n$ est une suite numérique alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum |a_n| x^n$ ont même rayon de convegence .Soit maintenant $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels tels que $\varepsilon_n \in \{-1;1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{array}{lll} Rcv(\sum \varepsilon_n x^n) & = Rcv(\sum x^n) & = 1 \\ & \text{et} & \\ Rcv(\sum \frac{\varepsilon_n}{n} x^n) & = Rcv(\sum \frac{1}{n} x^n) & = 1 \end{array} .$$

Dans la suite, pour $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n$. On remarque que $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ pour tout $x \in]-1;1[$

11. Si $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge, laors par le thorème d'Abel, $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe dans R .
   Réciproquement : Supposons que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, puisque $\frac{\varepsilon_n}{n} = O(\frac{1}{n})$ car $|\varepsilon_n| = 1$, le théorème de Littlewood s'applique, on a donc $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge et que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$
12. Come $(\varepsilon_n)_n$ est périodique de période p, on alors pou $x \in]-1;1[$:
   $$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^{n-1} \\ &= \varepsilon_1 x^0 + ... + \varepsilon_p x^{p-1} + \varepsilon_1 x^p + ... + \varepsilon_p x^{2p-1} + \varepsilon_1 x^{2p} + ... \\ &= \varepsilon_1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp} + \varepsilon_2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp+1} + ... + \varepsilon_p \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp+p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i x^{i-1} \sum_{k=0}^{\infty} x^{kp} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i x^{i-1}}{1-x^p} \end{aligned}$$
   Donc l'expresion de $g(x)$ est une fraction rationnelle en x .
13. On prend (ε_n) péridique de période 2 avec : $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = +1$ (ici $p = 2$), Donc $\varepsilon_n = (-1)^n$ pou tout $n \in \mathbb{N}^*$ et par la question 11. la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \int_0^x g(t)dt$. Or, d'après la question 12. : $g(x) = \frac{\sum_{i=1}^{2} \varepsilon_i x^{i-1}}{1-x^2} = \frac{-1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} = -\frac{1}{x+1}$ pour tout $x \in]-1,1[$ et donc $f(x) = \int_0^x g(t)dt = -\ln(1+x)$. Puisque $\lim_{x \to 1} f(x) = -\ln(2)$, on en déduit que :
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$
   On prend cette fois-ci $\varepsilon_n = 1$, ((ε_n) est périodique de période $p = 1$), alors $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ et $f(x) = \int_0^x g(t)dt = -\ln(1-x)$ et puisque $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, alors $\sum \frac{1}{n}$ diverge .
14. D'après la question 12. $g(x)$ est une fraction *rationnelle* en x : $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k x^{k-1}$ et $Q(x) = 1 - x^p = (1-x) \sum_{k=0}^{p-1} x^k$
   On a $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe dans R si et seulement si $\int_0^1 g(t)dt$ converge .
   On sait que g est continue sur $[0,1[$ (somme d'une série entière) et qu'au voisinage de 1, on a : $Q(x) \sim p(1-x)$ et $\lim_{x\to 1} P(x) = P(1) = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k$. Si $P(1) \neq 0$, alors $g(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{P(1)}{p(1-x)}$ et $\int_0^1 g(t)dt$ diverge.
   Si $\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k = P(1) = 0$ alors $g(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{P'(1)}{p}$ et g admet donc un prolongement par continuité en 1,

et donc $\int\limits_0^1 g(t)dt$ converge .

Conclusion : $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{p} \varepsilon_k = 0$.

Si p est impair alors $\sum\limits_{k=1}^{p} \varepsilon_k \neq 0$ car $\varepsilon_n \in \{-1;1\}$ et par suite la série $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ diverge .

15. **Exemple :**

Ici $p = 6$ avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ et $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -1.$, on a alors $P(1) = \sum\limits_{k=1}^{6} \varepsilon_k = 0$, et donc par la question 14. la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge *et* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{n} = \lim\limits_{x\to 1^-} \int\limits_0^x g(t)dt$.

Or pour $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} g(x) \quad = \tfrac{P(x)}{Q(x)} \quad &= \frac{1+x+x^2-x^3-x^4-x^5}{1-x^6} \\ &= \frac{\left(x^2+x+1\right)\left(1-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)\left(1-x^3\right)} \\ &= \frac{x^2+x+1}{x^3+1} \\ &= \frac{x^2+x+1}{(x+1)\left(1-x+x^2\right)} \\ &= \frac{1}{1-x+x^2} + \frac{x^2}{1+x^3} \end{aligned} \qquad .$$

puisque :

$$\begin{aligned} \int\limits_0^x \frac{1}{1-t+t^2}dt \overset{u=2t-1}{=} \int\limits_{-1}^{2x-1} \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}u^2}\tfrac{1}{2}du \quad &= \int\limits_{-1}^{2x-1} \tfrac{2}{3+u^2}du \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\tfrac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)) - \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(-\tfrac{\sqrt{3}}{3}) \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\tfrac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)) + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\tfrac{\sqrt{3}}{3}) \end{aligned}$$

et $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}dt = \frac{1}{3}\int\limits_0^x \frac{d(1+t^3)}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln(1+x^3)$, on a $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{1}{3}\ln(1+x^3)$ pour tout $x \in [0,1[$ et puis $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{1}{3}\ln(2) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{3}\ln 2$,
Conclusion :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{1}{3}\ln(2) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{3}\ln 2$$

****
***