SAINT-CYR

MATHEMATIQUES 1 - Epreuve commune

Options M, P, T, TA

PREMIERE PARTIE

1) a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement et donc uniformément et simplement sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

b) • Chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$, et la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(-nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = f(x)$$

et

$$f(x+2\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx+2n\pi)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = f(x).$$

f est donc paire et 2π-périodique.

$$\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}, \text{ paire et } 2\pi\text{-périodique.}}$$

c) f est continue sur le segment $[0, \pi]$ et donc I existe. De plus, puisque la série de terme général u_n converge uniformément vers f sur ce segment, le théorème d'intégration terme à terme sur un segment permet d'écrire :

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \cos(nx)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi = 0.$$

$$\boxed{\int_0^\pi f(x)\ dx = 0.}$$

d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Puisque pour tout réel x et tout entier non nul n, on a $|u_n(x)\cos(px)| \leqslant \frac{1}{n^2}$, la série de fonctions de terme général $x \mapsto u_n(x)\cos(px)$ est aussi uniformément convergente sur $[0, \pi]$ et donc,

$$I_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^\pi \cos(nx)\cos(px)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \int_0^\pi (\cos((n+p)x) + \cos((n-p)x)\ dx.$$

Mais, si $n \neq p$, $\int_0^\pi (\cos((n+p)x) + \cos((n-p)x)\ dx = 0$, et si $n = p$, $\int_0^\pi (\cos((n+p)x) + \cos((n-p)x)\ dx = \int_0^\pi (1 + \cos(2nx))\ dx = \pi$. Ainsi,

$$I_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2}\delta_{n,p} = \frac{\pi}{2p^2}.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi f(x)\cos(px)\ dx = \frac{\pi}{2p^2}.}$$

e) f est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire. Donc, pour $n \neq 0$, $b_n(f) = 0$ puis $a_0(f) = \dfrac{2\pi}{\mathrm{I}} = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \dfrac{2\pi}{\mathrm{I}}_{\ n} = \dfrac{1}{n^2}$. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est donc la série de FOURIER de f.

2) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\alpha, \pi]$.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{x}{2} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2}\sin(kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos((k-\frac{1}{2})x) - \cos((k+\frac{1}{2})x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos((n+\frac{1}{2})x)\right) \text{ (somme télescopique)} \\
&= \sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}.
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{x}{2} \in [\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\pi}{2}] \subset]0, \dfrac{\pi}{2}]$, on a $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$ et donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [\alpha, \pi],\ s_n(x) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [\alpha, \pi],\ |s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.}$$

b) Soient $n \geq 2$ et $x \in [\alpha, \pi]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} &= \sin(x) + \sum_{k=2}^{n}\frac{s_k(x) - s_{k-1}(x)}{k} = \sin(x) + \sum_{k=2}^{n}\frac{s_k(x)}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{s_{k-1}(x)}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{s_k(x)}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{s_k(x)}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(x)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{s_n(x)}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{s_k(x)}{k(k+1)} + \frac{s_n(x)}{n}.
\end{aligned}$$

c) Pour $k \geq 1$ et $x \in [\alpha, \pi]$, $\left|\dfrac{s_k(x)}{k(k+1)}\right| \leq \dfrac{1}{\sin(\alpha/2)k^2}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{\sin(\alpha/2)k^2}$ converge, la série de fonctions de terme général $\dfrac{s_k}{k(k+1)}$ converge normalement et donc uniformément sur $[\alpha, \pi]$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\alpha, \pi]$, $\left|\dfrac{s_n(x)}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n\sin(\alpha/2)}$, et donc $\|\dfrac{s_n}{n}\|_{\infty,\ [\alpha,\pi]} \leq \dfrac{1}{n\sin(\alpha/2)} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la suite de fonctions $\left(\dfrac{s_n}{n}\right)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha, \pi]$.

D'après c), la série de fonctions de terme général $\dfrac{s_k}{k(k+1)}$ converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$, ou encore, la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{s_k}{k(k+1)}\right)_{n\geq 2}$ converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$. Comme la suite $(\dfrac{s_n}{n})$ converge aussi uniformément sur $[\alpha, \pi]$, la suite des sommes partielles de la série de fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(kx)}{k}$ converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$, ou encore la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$.

e) Pour $\alpha \in]0, \pi]$ donné, la série de fonctions de terme général u_n converge simplement vers f sur $[\alpha, \pi]$, chaque u_n est dérivable sur $[\alpha, \pi]$ et, d'après d), la série de fonctions de terme général u'_n converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est dérivable sur $[\alpha, \pi]$, et ceci pour tout $\alpha \in]0, \pi]$. f est donc dérivable sur $]0, \pi]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\boxed{\forall x \in]0, \pi],\ f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.}$$

En particulier, $f'(\pi) = 0$.

f) Soit $x \in]0, \pi]$. La série de terme général $u_n''(x) = -\cos(nx)$ est grossièrement divergente. En effet, supposons par l'absurde que $\cos(nx)$ tende vers 0, alors $\sin^2(nx) = 1 - \cos^2(nx)$ tend vers 1 puis $|\cos(nx)| = \dfrac{|\sin(2nx)|}{2|\sin(nx)|}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas deux fois dérivable terme à terme sur }]0, \pi].}$$

3) a) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que, pour $n \geq n_0$, $|u_n - L| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_0 + 1$, on a alors

$$\begin{aligned}
|v_n - L| &= \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \right) - L \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k - L) \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - L| \\
&\leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) \right| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Mais l'expression $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) \right|$ est constante quand n varie. Par suite, $\dfrac{1}{n} \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) \right|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il existe donc $n_1 \geq n_0 + 1$ tel que, pour $n \geq n_1$, $\dfrac{1}{n} \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_1$, on a alors $|v_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists n_1 \in \mathbb{N}^* /\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n \geq n_1 \Rightarrow |v_n - L| < \varepsilon)$, et donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers } L.}$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

$$2 \sin \frac{x}{2} \sigma_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x) \right) = \sin((n + \frac{1}{2})x) - \sin \frac{x}{2},$$

et donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ \sigma_n'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(\frac{(2n+1)x}{2})}{2 \sin \frac{x}{2}}.}$$

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{(2k+1)x}{2} = \sum_{k=1}^{n} (\cos(kx) - \cos(k+1)x) = \cos(x) - \cos((n+1)x) = 2 \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2}.$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{(2k+1)x}{2} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.}$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

$$\Sigma_n'(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k'(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(\frac{(2k+1)x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}\right) \text{ (d'après b)}$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k+1)x}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+2)x}{2}}{2n\sin\frac{x}{2}}$$

Mais alors, pour $x \in [\alpha, \pi]$, $\left|\Sigma_n'(x) + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n\sin(\alpha/2)}$. Par suite, $\|\Sigma_n' + \frac{1}{2}\|_{\infty,[\alpha,\pi]} \leq \frac{1}{2n\sin(\alpha/2)} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (\Sigma_n') \text{ converge uniformément vers la fonction constante } -\frac{1}{2} \text{ sur } [\alpha, \pi].}$$

e) Sur $[\alpha, \pi]$, la suite (σ_n) converge simplement vers $-f'$. D'après 3)a), il en est de même de la suite (Σ_n). De plus, chaque Σ_n est dérivable sur $[\alpha, \pi]$ et la suite des dérivées converge uniformément vers $-\frac{1}{2}$ sur $[\alpha, \pi]$ et ceci pour tout $\alpha \in]0, \pi]$. On en déduit que $-f'$ est dérivable sur $]0, \pi]$ et que $-f'' = \lim \Sigma_n' = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur }]0, \pi] \text{ et } \forall x \in]0, \pi],\ f''(x) = \frac{1}{2}.}$$

f) Pour $x \in]0, \pi]$, $f'(x) = f'(\pi) + \int_{\pi}^{x} f''(t)\ dt = \frac{x - \pi}{2}$. Par suite, il existe un réel a tel que pour tout x de $]0, \pi]$, $f(x) = \frac{1}{4}(x - \pi)^2 + a$. L'égalité $\int_0^{\pi} f(x)\ dx = 0$ fournit

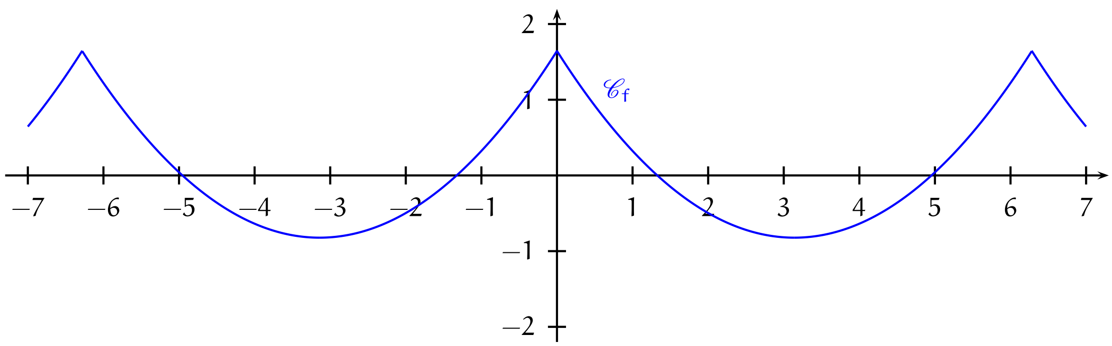
$$a = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}(t - \pi)^2\ dt = -\frac{1}{4\pi}\frac{\pi^3}{3} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Ainsi, $\forall x \in]0, \pi]$, $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$. Cette égalité reste valable pour $x = 0$ par continuité de f en 0. Si maintenant, $x \in [-\pi, 0]$, $f(x) = f(-x) = f(|x|) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi|x|}{2} + \frac{\pi^2}{6}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi|x|}{2} + \frac{\pi^2}{6}.}$$

Enfin, si x est un réel quelconque, il existe un unique entier relatif k tel que $-\pi + 2k\pi \leq x < \pi + 2k\pi$ à savoir $k = E\left(\frac{x + \pi}{2\pi}\right)$. Mais alors, f étant 2π-périodique, $f(x) = f(x - 2k\pi) = \frac{(x - 2k\pi)^2}{4} - \frac{\pi|x - 2k\pi|}{2} + \frac{\pi^2}{6}$. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{4}\left(x - 2E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)\pi\right)^2 - \frac{1}{2}\left|x - 2E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)\pi\right| + \frac{\pi^2}{6}.}$$



4) **a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=f(0)=\frac{\pi^2}{6}$ puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=f(\pi)=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}=-\frac{\pi^2}{12}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.}$$

b) Les séries considérées convergent uniformément sur les segments considérés. On peut donc intégrer terme à terme. Pour $x\in[0,\pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}=\int_0^x f(t)\ dt=\frac{x^3}{12}-\frac{\pi x^2}{4}+\frac{\pi^2 x}{6}$, puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos(nx)}{n^4}=\frac{x^4}{48}-\frac{\pi x^3}{12}+\frac{\pi^2x^2}{12}.$$

$x=\pi$ fournit $\displaystyle\frac{\pi^4}{48}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}=2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. Mais alors,

$$S=\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{p=1}^{=\infty}\frac{1}{(2p)^4}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{1}{16}S+\frac{\pi^4}{96}.$$

Par suite, $S=\dfrac{16}{15}\dfrac{\pi^4}{96}=\dfrac{\pi^4}{90}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.}$$

On en déduit aussi que

$$\forall x\in[0,\pi],\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^4}=-\frac{x^4}{48}+\frac{\pi x^3}{12}-\frac{\pi^2x^2}{12}+\frac{\pi^4}{90}.$$

On recommence. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^5}=-\frac{x^5}{240}+\frac{\pi x^4}{48}-\frac{\pi^2x^3}{36}+\frac{\pi^4x}{90}$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos(nx)}{n^6}=-\frac{x^6}{1440}+\frac{\pi x^5}{240}-\frac{\pi^2x^4}{144}+\frac{\pi^4x^2}{180}$.

$x=\pi$ fournit $\displaystyle 2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}=\pi^6(-\frac{1}{1440}+\frac{1}{240}-\frac{1}{144}+\frac{1}{180})$ et donc $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^6}{960}$. Mais alors,

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^6}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}=\frac{1}{64}S+\frac{\pi^6}{960}.$$

Par suite, $S=\dfrac{64}{63}\dfrac{\pi^6}{960}=\dfrac{\pi^6}{945}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}.}$$

DEUXIEME PARTIE

1) f_a est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier. f_a est paire. Par suite, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f_a)=0$. Puis,

$$a_0(f_a)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a^2(x-\pi)^2\ dx=a^2\frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3}=\frac{2a^2\pi^2}{3}$$

et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2a^2}{\pi}\int_0^\pi (x-\pi)^2\cos(nx)\,dx = \frac{2a^2}{\pi}\left(\left[(x-\pi)^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi (x-\pi)\sin(nx)\,dx\right)\\
&= \frac{4a^2}{n\pi}\int_0^\pi (x-\pi)(-\sin(nx))\,dx = \frac{4a^2}{n\pi}\left(\left[(x-\pi)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right)\\
&= \frac{4a^2}{n^2}
\end{aligned}$$

f_a est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f_a converge vers f sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'écrire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = 4a^2\left(\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right).}$$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^2+a^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2+a^2}$, terme général d'une série numérique convergente. Ainsi, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \frac{\cos(nx)}{n^2+a^2}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Puisque chaque fonction $x \mapsto \frac{\cos(nx)}{n^2+a^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que h_a est continue sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, h_a est clairement paire et 2π-périodique.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ h_a \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ paire et } 2\pi\text{-périodique.}}$$

3) a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $(f_a - h_a)(x) = 4a^2\left(\dfrac{\pi^2}{12} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+a^2}\right)\cos(nx)\right) = 4a^2\left(\dfrac{\pi^2}{12} + a^2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2(n^2+a^2)}\right)$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi_0(x) = \dfrac{a^2\pi^2}{3}$ et pour $n \geq 1$, $\varphi_n(x) = \dfrac{4a^4\cos(nx)}{n^2(n^2+a^2)}$. La série de fonctions de terme général φ_n converge simplement vers $f_a - h_a$ sur $\mathbb{R}$ et chaque fonction φ_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|\varphi_n'(x)| = \left|\dfrac{-4a^4\sin(nx)}{n(n^2+a^2)}\right| \leq \dfrac{4a^4}{n(n^2+a^2)}$ et $|\varphi_n''(x)| = \left|\dfrac{-4a^4\cos(nx)}{n^2+a^2}\right| \leq \dfrac{4a^4}{n^2+a^2}$, termes généraux de séries numériques convergentes. Ainsi, les séries de fonctions de termes généraux φ_n' et φ_n'' sont normalement et donc uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$. $f_a - h_a$ est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, $(f_a-h_a)'$ et $(f_a-h_a)''$ s'obtenant par dérivation terme à terme.

c) Pour $x \in [0,\pi]$, $(f_a-h_a)'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4a^4\sin(nx)}{n(n^2+a^2}$ et donc pour $x \in]0,\pi[$, $h_a'(x) = f_a'(x) + 4a^4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n(n^2+a^2)}$. Comme la fonction $x \mapsto 4a^4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n(n^2+a^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, cette fonction admet pour limites en 0 à droite et en π à gauche ses valeurs respectives en 0 et π à savoir 0. Pour $x \in]0,\pi[$, $f_a'(x) = 2a^2(x-\pi)$ et donc f_a' tend vers $-2a^2\pi$ en 0 et 0 en π. Il en est de même de h_a'.

En résumé,

- h_a est continue sur $[0,\pi]$,
- de classe C^1 sur $]0,\pi[$
- h_a' a une limite réelle en 0 et en π.

D'après un théorème classique d'analyse, h_a est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ et en particulier, admet une dérivée à droite en 0 égale à $h_a'(0^+) = -2a^2\pi$ et une dérivée à gauche en π égale à $h_a'(\pi^-) = 0$.

$$\boxed{h_a \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,\pi].\ h_a'(0^+) = -2a^2\pi \text{ et } h_a'(\pi^-) = 0.}$$

d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $(f_a-h_a)''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-4a^4\cos(nx)}{n^2+a^2} = -a^2h_a(x)$ et donc

$$\boxed{(f_a-h_a)'' = -a^2h_a.}$$

e) Puisque f_a et $f_a - h_a$ sont de classe C^2 sur $]0,\pi[$, $h_a(= f_a - (f_a - h_a))$ est de classe C^2 sur $]0,\pi[$ et pour $x \in]0,\pi[$, $f_a''(x) - h_a''(x) = -a^2 h_a(x)$, ou encore $h_a''(x) - a^2 h_a(x) = 2a^2$.

$$\boxed{h_a \text{ est solution sur }]0,\pi[\text{ de l'équation différentielle } y'' - a^2 y = 2a^2,\ (E).}$$

La fonction $x \mapsto -2$ est une solution particulière de (E) sur $]0,\pi[$. D'autre part, les deux fonctions $x \mapsto \mathrm{ch}(ax)$ et $x \mapsto \mathrm{sh}(ax)$ sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée $y'' - a^2 y = 0$ (puisque $a \neq 0$). Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto -2 + A\,\mathrm{ch}(ax) + B\,\mathrm{sh}(ax)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Par suite, il existe deux réels A et B tels que, pour $x \in]0,\pi[$, $h_a(x) = -2 + A\,\mathrm{ch}(ax) + B\,\mathrm{sh}(ax)$, ce qui reste vrai pour $x = 0$ ou $x = \pi$ par continuité de h_a en 0 et en π.

$$\boxed{\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in [0,\pi],\ h_a(x) = A\,\mathrm{ch}(ax) + B\,\mathrm{sh}(ax) - 2.}$$

f) Pour $x \in [0,\pi]$, $h_a'(x) = a(A\,\mathrm{sh}(ax) + B\,\mathrm{ch}(ax))$. $x = 0$ fournit $aB = -2a^2\pi$ et donc $B = -2a\pi$. Puis $x = \pi$ fournit $A\,\mathrm{sh}(a\pi) - 2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi) = 0$ et donc, $A = \dfrac{2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{\mathrm{sh}(a\pi)}$.

$$\boxed{\forall x \in [0,\pi],\ h_a(x) = 4a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2} = -2 + \frac{2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{\mathrm{sh}(a\pi)}\,\mathrm{ch}(ax) - 2a\pi\,\mathrm{sh}(ax).}$$

4) $x = 0$ fournit $-2 + \dfrac{2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{\mathrm{sh}(a\pi)} = 4a^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ et donc,

$$\boxed{\forall a > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{4a^2}\left(-2 + \frac{2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{\mathrm{sh}(a\pi)}\right).}$$

et $x = \pi$ fournit

$$\boxed{\forall a > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{4a^2}\left(-2 + \frac{2a\pi}{\mathrm{sh}(a\pi)}\right).}$$

La série de fonctions de terme général $a \mapsto \dfrac{1}{n^2 + a^2}$ est normalement et donc uniformément convergente sur $[0,\pi]$ ($|\dfrac{1}{n^2 + a^2}| \leq \dfrac{1}{n^2}$). Comme chacune de ces fonctions est continue sur $[0,\pi]$, la somme l'est encore. En particulier, la somme est continue en 0. Par suite, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \lim_{a \to > 0} \frac{1}{4a^2}\left(-2 + \frac{2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{\mathrm{sh}(a\pi)}\right)$. Or, quand a tend vers 0,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4a^2}\left(-2 + \frac{2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{\mathrm{sh}(a\pi)}\right) &= \frac{-2(a\pi + \frac{a^3\pi^3}{6}) + 2a\pi(1 + \frac{a^2\pi^2}{2}) + o(a^3)}{4a^2(a\pi + o(a))} = \frac{\frac{2\pi^3 a^3}{3} + o(a^3)}{4a^3\pi + o(a^3)} \\
&= \frac{\pi^2}{6} + o(1),
\end{aligned}$$

et on retrouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5) Soit $A > 0$. Pour $a \in [0,A]$, $\left|\dfrac{d}{da}(\dfrac{1}{n^2 + a^2})\right| = \left|\dfrac{-2a)}{(n^2 + a^2)^2}\right| \leq \dfrac{2A}{n^2}$... On peut donc dériver terme à terme sur $[0,+\infty[$ et on obtient pour $a > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^2} &= \frac{-1}{2a}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{4a^2}(-2 + \frac{2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{\mathrm{sh}(a\pi)})\right) \\
&= \frac{-1}{2a}\left[\frac{-2}{4a^3}(-2 + \frac{2a\pi\,\mathrm{ch}(a\pi)}{\mathrm{sh}(a\pi)}) + \frac{1}{4a^2}\frac{2[(\pi\,\mathrm{ch}(a\pi) + a^2\pi\,\mathrm{sh}(a\pi))\,\mathrm{sh}(a\pi) - a\pi^2\,\mathrm{ch}^2(a\pi)]}{\mathrm{sh}^2(a\pi)}\right].
\end{aligned}$$

