Devoir Libre

16 Phénomène de Gibbs

Blague du jour

Dans une voiture, quatre ingénieurs. Tout coup la voiture s'arrête..
- Le Mécanicien : Je le savais, c'est un problème de transmission.
- Le chimiste : c'est la faute des acides de la batterie !
- L'électronicien : c'est le circuit électronique qui ne marche plus !.
- L'Informaticien en dernier : ... et si on essayait de fermer toutes les fenêtres ouvertes, de quitter, et redémarrer à nouveau ?

David Hilbert (1862-1943)

Mathématicien allemand. Il est considéré comme un des plus grands mathématiciens du XX ème siècle, au même titre que Henri Poincaré. Il a développé la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie, les fondements de l'analyse fonctionnelle, la mécanique quantique et la relativité générale. Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques.

Mathématicien du jour

Énoncé : CCP 2006, MP

EXERCICE 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ que l'on déterminera.

2. Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

EXERCICE 2

1. Rappeler la définition (par les suites) d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

2. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application continue de E dans F.
Si A est une partie compacte de E, démontrer que $f(A)$ est une partie compacte de F.
L'image réciproque par f d'une partie compacte de F est-elle nécessairement une partie compacte de E?

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

PROBLÈME : PHÉNOMÈNE DE GIBBS

Partie préliminaire

1. (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0;\pi]$.

   On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus et déterminer, avec soin, une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ vérifiant $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k$.

2. (a) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n\,!}\right)_{n\geq 0}$ converge et que la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n.n\,!}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante.

   (b) Si $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$, majorer $|R_n|$, en utilisant la question (a).

   En déduire, en précisant la valeur de n utilisée, une valeur approchée du réel $\dfrac{2}{\pi} I$ à 10^{-2} près.

Première partie : Phénomène de Gibbs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ impaire et de période 2π vérifiant :

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in]0;\pi[\quad \text{et} \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

3. On pose pour tout entier naturel n non nul et t réel,

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}.$$

   Démontrer, à l'aide d'une série de Fourier, que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

4. Sur un même graphique, uniquement à l'aide d'une calculatrice, tracer sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{10}. Puis sur un autre graphique, tracer sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{20}.
   Que constate-t-on sur les courbes des fonctions S_n lorsque t se rapproche de 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures ?
   Cette particularité est appelée phénomène de Gibbs.

5. On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\sin[(2k+1)t].$$

(a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

.
$$T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}.$$

Dans la suite de cette question 5., on considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(b) Justifier qu'il existe une constante M telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a, b]$, $T_n(t) \leq M$.

(c) Démontrer que l'on peut trouver une suite de réels (w_n) convergeant vers 0 et telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a, b]$, $|f(t) - S_n(t)| \leq w_n$.
En commençant par observer que $\sin[(2k + 1)t] = T_{k+1}(t) - T_k(t)$, on pourra chercher à majorer, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls et tout $t \in [a, b]$, $|S_{n+p}(t) - S_n(t)|$.
Que peut-on en déduire concernant la série de Fourier de la fonction f ?

6. (a) Calculer $S_n'(t)$ pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer la plus petite valeur α_n qui annule $S_n'(t)$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Démontrer que, pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et n entier naturel non nul,
$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \quad \text{puis que} \quad S_n(\alpha_n) = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}}\,\mathrm{d}u.$$

(c) Démontrer que la suite $(S_n(\alpha_n))_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite.
On pourra utiliser sans démonstration : pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$.

7. Démontrer que la suite $\left(\sup\limits_{x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[} |S_n(x) - f(x)|\right)_n$ ne converge pas vers 0.

Deuxième partie : Démonstration du théorème de convergence normale

Pour une fonction f continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π, on note pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

8. Rappeler le théorème de Parseval (avec les coefficients $c_n(f)$) pour une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π.
Dans le cas où la fonction f est de plus continue sur $\mathbb{R}$, justifier que si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$ alors f est la fonction nulle.
Ce résultat reste-t-il valable si la fonction f est seulement continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π ?

9. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π dont la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g :
$$\forall t \in \mathbb{R},\; g(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty} (c_{-p}(f)e^{-ipt} + c_p(f)e^{ipt}).$$

(a) Justifier que l'application g est continue sur $\mathbb{R}$ puis pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, exprimer, avec soin, $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.

(b) Démontrer que $f = g$.

10. Dans cette question, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et de classe C^1 par morceaux.
On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$u_n(f)(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}.$$

(a) Déterminer une relation entre $c_n(f')$ et $c_n(f)$.
(b) Démontrer que pour tout t réel,

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2).$$

(c) Démontrer, avec soin, que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser vers quelle fonction.
(d) Énoncer le théorème que l'on vient de démontrer.
Le phénomène de Gibbs peut-il se produire pour cette fonction f ?

mamouni.myismail@gmail.com