Corrigé : Pr. Boujaida, CPGE Rabat, Maroc

Problème

Partie préliminaire

① ① la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,\pi]$ prolongeable par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur $]0,\pi]$.

② Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$. et donc si $t \neq 0$,

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}.$$

Soit la fonction f somme de la série entière $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$. f est naturellement DSE sur $\mathbb{R}$, chacune de ses primitives l'est aussi, si on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

alors

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Comme $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in]0,\pi]$ alors

$$F(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \pi^{2n+1}$$

Soit $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ avec $u_n = \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

② ① Utiliser de D'Alembert, ou alors mentionner le fait que la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini (c'est du cours).

Si on pose $a_n = \dfrac{\pi^n}{n.n!}$ alors $a_n > 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\pi}{(n+1)!(n+1)} \leq \dfrac{\pi}{2.2} \leq 1$ si $n \geq 1$.

donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Elle converge vers 0 puisque $a_n \leq \dfrac{\pi^n}{n!}$.

② On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_{2n+1}$ donc $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial de convergence des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente et si on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ alors

$$|R_n| \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!\,(2n+3)}$$

Nous allons maintenant approcher le réel $\dfrac{2}{\pi} I$ par les termes $\dfrac{2}{\pi} S_n$ où S_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum (-1)^n u_n$.

$$|\frac{2}{\pi} S_n - \frac{2}{\pi} I| = \frac{2}{\pi} |R_n| \leq 2 \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+3)!\,(2n+3)} \leq 2 \frac{10^{n+1}}{(2n+3)!\,(2n +$$

Pour que $\dfrac{2}{\pi} S_n$ approche $\dfrac{2}{\pi} I$ à 10^{-2} près, il suffit que

$$2\frac{10^{n+1}}{(2n+3)!\,(2n+3)} \leq 10^{-2}$$

soit $(2n+3)!\,(2n+3) \geq 2.10^{n+3}$.

$n = 3$ suffit et dans ce cas $\frac{2}{\pi}S_n \simeq 1,17$

Phénomène de Gibbs

③ Vu la parité de la fonction f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, et par un calcul simple $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \dfrac{4}{\pi(2n+1)}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ses points de discontinuité sont ceux de la forme $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

D'après le théorème de Dirichlet, pour tout point $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, point où f est continue

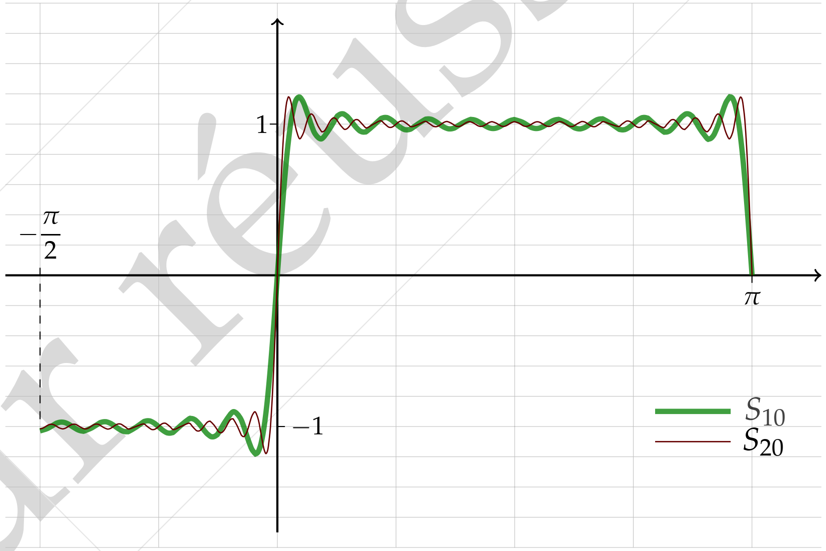
$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}\sin\left[(2k+1)t\right] = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)t\right]}{2k+1}$$

égalité encore valable lorsque $t \in \pi\mathbb{Z}$ puisque dans ce cas $\sin\left[(2k+1)t\right] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = 0$.

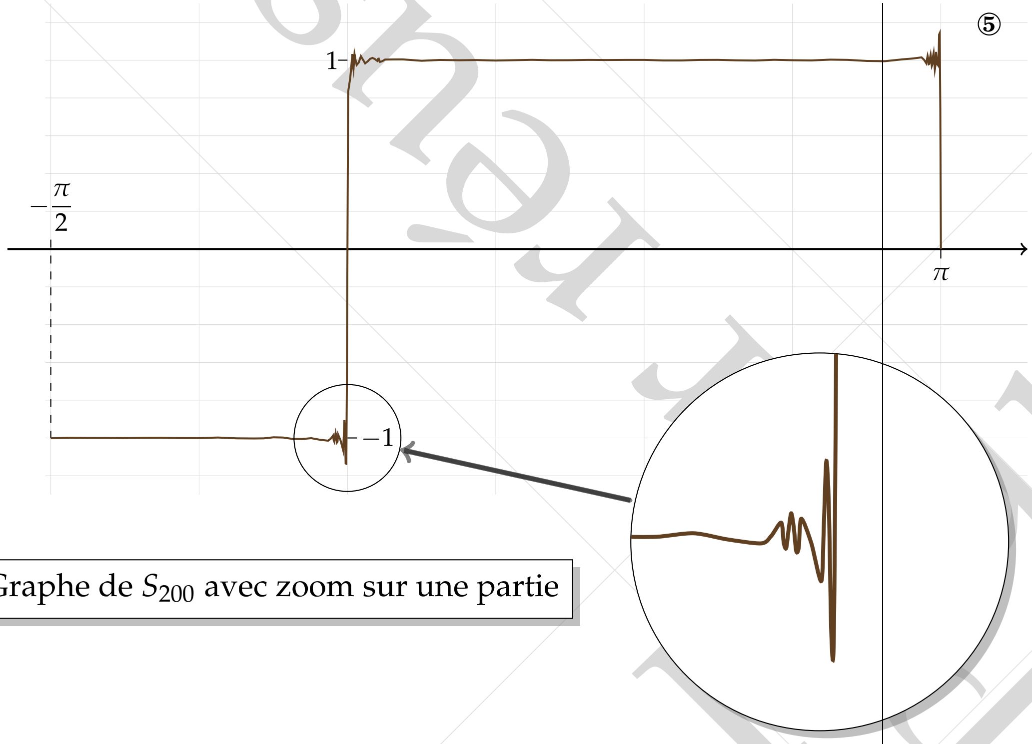
La suite de fonction $(S_n)_n$ converge donc simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

La convergence n'est pas uniforme puisque les fonctions S_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ est que f ne l'est pas.

④ Les graphes des fonctions S_{10}, S_{20} et séparèment celui de S_{200} pour une meilleure illustration du phénomène, sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi]$.



⑤



Graphe de S_{200} avec zoom sur une partie

Au voisinage de 0, que ce soit à droite ou à gauche, la convergence de S_n vers f n'est pas uniforme. On perçoit de fortes perturbations de la fonction S_n au voisinage de 0, au fur est à mesure que n grandit. C'est le phénomène de Gibbs.

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left[(2k+1)t\right] &= \Im\left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{i(2k+1)t}\right) = \Im\left(e^{it}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dots\right.\right. \\ &= \Im\left(e^{it}\frac{1-e^{2int}}{1-e^{2it}}\right) = \Im\left(\frac{e^{it}-e^{i(2\dots}}{1-e^{2\dots}}\right. \\ &= \Im\left(\frac{-2i\sin(nt)e^{i(n+1)t}}{-2i\sin(t)e^{it}}\right) = \Im\left(\dots\right. \\ &= \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} \end{aligned}$$

② Soit un segment $[a,b] \subset \left]0,\pi/2\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [a,b]$

$$T_n(t) \leq \frac{1}{\sin a}$$

On pose alors $M = \dfrac{1}{\sin a}$.

③ On exécute la transformation dite d'Abel, pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} S_{n+p}(t) - S_n(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin\left[(2k+1)t\right]}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_{k+1}(t) \dots}{2k+\dots} \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\sum_{k=n+2}^{n+p+1}\frac{T_k(t)}{2k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_k(t)}{2k+1}\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{T_{n+p+1}}{2(n+p+1)-1} - \frac{T_{n+1}}{2(n+1)-1} + \sum_{k=n\dots}^{n+\dots}\dots\right. \end{aligned}$$

De quoi on déduit

$$\begin{aligned}|S_{n+p}(t)-S_n(t)| &\leq \frac{4M}{\pi}\left(\frac{1}{2n+2p+1}+\frac{1}{2n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)\\ &\leq \frac{4M}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}+\left(\frac{1}{2(n+1)-1}-\frac{1}{2n+2p+1}\right)\right)\\ &\leq \frac{4M}{\pi}.\frac{3}{2n+1}=\frac{12M}{\pi(2n+1)}\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon>0$ et soit un entier N tel que $\frac{12M}{\pi(2N+1)}\leq\varepsilon$.

Pour tous $n\geq N$, $p\in\mathbb{N}$ et pour tout $t\in[a,b]$ on a alors

$$|S_{n+p}(t)-S_n(t)|\leq\varepsilon$$

Ceci démontre que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur le segment $[a,b]$. Convergence qui se fait vers f puisque on a déjà vu qu'il y'a convergence simple vers f sur $\mathbb{R}$.

⑥ ① Soit $t\in]0,\pi/2]$.

$$S_n'(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left[(2k+1)t\right]=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}e^{i(2k+1)t}=\frac{4}{\pi}\Re\left(\frac{\sin nt}{\sin t}e^{int}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nt}{\sin t}$$

$$S_n'(t)=0\Longleftrightarrow\sin 2nt=0\Longleftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z};\ t=\frac{k}{2n}\pi$$

La plus petite valeur qui annule S_n' sur $]0,\pi/2]$ est donc le réel $\alpha_n=\frac{\pi}{2n}$.

② On a vu que pour tout $t\in]0,\pi/2]$, $S_n'(t)=\frac{\sin 2nt}{\sin t}$. La fonction $s_n:t\longmapsto\frac{\sin 2nt}{\sin t}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $s_n(0)=2n$.

S_n, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, est alors une primitive de s_n sur le segment $[0,\pi/2]$ avec $S_n(0)=0$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, pour tout $x\in[0,\pi/2]$

$$S_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x s_n(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt$$

l'intégrale du dernier terme de cette égalité se faisant sur l'intervalle $]0,x]$. De là

$$S_n(\alpha_n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2n}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt\overset{u=2nt}{=}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}du$$

③ En observant que $\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}\sim\frac{\sin u}{u/2n}$ au voisinage de 0, on peut faire l'hypothèse que

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}du\longrightarrow\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}du\quad(*)$$

chose qu'on va s'atteler à démontrer.

On va utiliser les inégalités connues :

$\forall t\in[0,\pi/2],\ \sin t\geq\frac{2}{\pi}t$ (concavité de sin sur $[0.\pi/2]$)

$\forall t\in\mathbb{R},\ |\sin t-t|\leq\frac{1}{6}|t|^3$ (inégalité de Taylor–Lagrange).

On a alors pour tout $t\in]0,\pi/2]$

$$\left|\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right|=\frac{|t-\sin t|}{t\sin t}\leq\frac{\frac{1}{6}t^3}{t.\frac{2}{\pi}t}\leq\frac{\pi}{12}t$$

Si maintenant $n\in\mathbb{N}^*$ et $u\in]0,\pi]$ alors $\frac{u}{2n}\in[0,\pi/2]$ et donc

$$\left|\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}-\frac{\sin u}{u/2n}\right|\leq\frac{\pi}{12}.\frac{u}{2n}|\sin u|\leq\frac{\pi^2}{24n}$$

On intègre sur $]0,\pi]$

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}du-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}du\right|\leq\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}-\frac{\sin u}{u/2n}\right|du\leq\frac{\pi^2}{24n^2}$$

Ce qui démontre l'assertion $(*)$, assertion qui signifie que

$$S_n(\alpha_n)\longrightarrow\frac{2}{\pi}I$$

⑦ $\alpha_n\in]0.\pi/2[$ donc $f(\alpha_n)=1$ et donc

$$\sup_{x\in]0,\pi/2[}|S_n(x)-f(x)|\geq|S_n(\alpha_n)-f(\alpha_n)|\geq|S_n(\alpha_n)-1|$$

Puisque $(S_n(\alpha_n))$ converge vers $\frac{2}{\pi}I$ est que $\frac{2}{\pi}I\simeq 1,17$ d'après la question (2.b.) alors la quantité

$$\sup_{x\in]0,\pi/2[}|S_n(x)-f(x)|$$

ne peut converger vers 0, car sinon $(S_n(\alpha_n))$ convergerait vers 1.

N.B : La question revient à démontrer que la suite de fonctions $(S_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur l'intervalle $]0,\pi/2[$. Tout le brique à braque mis en œuvre pour y arriver, en dehors de son aspect sportif, est inutile. En effet il suffisait de mettre en défaut le théorème d'interversion

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+}S_n(x)\neq\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to+\infty}S_n(x)$$

La première double limite valant 0, la seconde 1.

La question aurait eu plus d'intérêt si elle s'était orientée vers une minoration effective de $\sup_{x\in]0,\pi/2[}|S_n(x)-f(x)|$.

Démonstration du théorème de la convergence normale

⑧ La formule de Parseval pour une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ continue par morceaux 2π-périodique

$$|c_0(f)|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n(f)|^2+|c_{-n}(f)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$$

Si f est continue et tous ses coefficients de Fourier sont nuls alors

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt=0\quad(**)$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[0,2\pi]$, cela implique qu'elle est nulle sur ce segment et par périodicité, sur $\mathbb{R}$ tout entier. f est donc la fonction nulle.

Si maintenant f était seulement continue par morceaux, l'égalité $(**)$ est toujours valable, elle implique que f s'annule en tout point où elle est continue, et donc pas forcément partout nulle, sauf si ... elle était continue.

(Précisons, si f est 2π-périodique, continue par morceaux et vérifie l'égalité $(**)$ alors $f=0\Longleftrightarrow f$ est continue)

⑨ f est continue 2π-périodique et sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $t\in\mathbb{R}$.

$$g(t)=c_0(f)+\sum_{p=1}^{+\infty}c_p(f)e^{ipt}+c_{-p}(f)e^{-ipt}$$

① les fonctions $t\longmapsto c_p(f)e^{ipt}+c_{-p}(f)e^{-ipt}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ est la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, grace à la convergence uniforme sur le **segment** $[0,2\pi]$ on peut intégrer terme à terme l'expression

$g(t)e^{-int}$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \frac{c_0(g)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(c_p(f)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(p-n)t}dt + c_{-p}(f)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i(p+n)t}dt\right)$$

Comme pour tout $(k,h) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-h)t}dt = \delta_{kh}$ une seule des intégrales figurant dans cette expression est non nulle, elle est obtenue pour $p = n$ si $n \geq 0$, pour $p = -n$ si $n < 0$. Ce qui nous mène à l'égalité

$$c_n(g) = c_n(f)$$

② $f - g$ est continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et par linéarité des coefficients de Fourier

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f-g) = c_n(f) - c_n(g) = 0$$

D'après la question (8.) on a donc $g = f$.

⑩ ① f étant **continue** et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, une intégration par parties donne

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right) = inc_n(f)$$

② Pour deux nombres complexes a et b, $|ab| \leq \frac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2\right)$ (découle tout bêtement de $(|a|-|b|)^2 \geq 0$).

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ alors $u_n(f)(t) = \frac{1}{in}\left(c_n(f')e^{-int} - c_{-n}(f)e^{int}\right)$ et donc

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{|c_n(f')|}{n} + \frac{|c_{-n}(f')|}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2\right)$$

③ La fonction f' étant continue par morceaux 2π-périodique, d'après la formule de Parseval les séries à termes réels positifs $\sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ sont convergentes. La majoration obtenue dans la question précédente achève de démontrer que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Elle converge vers la fonction g définie dans la question (9.), toujours d'après cette question, on a forcément $g = f$.

Ainsi $\sum u_n(f)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

④ Le phénomène de Gibbs ne subsiste plus pour une fonction 2π périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.