XM6-CPGE My Youssef

Devoir Libre 15

Séries de Fourier

Rabat le 3 mars 2010

Blague du jour :

• Quelle est la femme politique la plus électrique ?
Réponse : Sokarno Mega Watt ¡
• Quel président est chargé de boucher les trous à l'ONU ?

George bouche.

Mathématicien du jour **Dirichlet**
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) est un mathématicien allemand. Il fut en contact avec les plus grands mathématiciens français de l'époque, dont Legendre, Laplace, Fourier, Gauss, Jacobi. Il eut entre autres comme élève Riemann. Les travaux de Dirichlet ont surtout porté sur les séries de Fourier, sur l'arithmétique (conjecture de Fermat). On lui doit aussi le principe des tiroirs.

Source : Concours, CCP-2004, MP.

À propos de l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux » du théorème de convergence normale d'une série de Fourier ...

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et de période 2π, on associe ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\, dt$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis par :
$a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, dt$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\, dt$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
On pose, pour tout entier naturel p et tout réel x :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} \left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right).$$

On rappelle le **théorème de convergence normale** :
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de période 2π et de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction f est limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$.

Nous allons étudier ce qui peut se produire si on enlève à ce théorème l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux ».
Une première partie démontre des résultats préliminaires.
Une deuxième partie traite d'un exemple où, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », la série de Fourier peut diverger.
Une troisième partie recherche une condition plus faible pour que, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », on puisse quand même assurer que la série de Fourier de f converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1) Résultats préliminaires

a) Si, dans le théorème de convergence normale ci-dessus, on suppose que la fonction f n'est pas continue mais seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$:
   i. Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit.
   ii. Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

b) On considère la fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période 2π , paire et définie pour $x \in [0, \pi]$, par $\varphi(x) = \sqrt{x}$.
Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

c) **Théorème de Cesàro**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers le complexe l.
   i. Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k - l) = o(n+1)$ au voisinage de $+\infty$.
   ii. En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}\right)$ converge vers l.

d) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de période 2π dont la somme de Fourier de rang n est notée $S_n(f)$. Pour n entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de f de rang n, notée $\sigma_n(f)$ comme la moyenne de Cesàro des sommes de Fourier :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\left(S_0(f) + S_1(f) + \ldots + S_n(f)\right).$$

On démontre, ***et nous l'admettrons***, le **théorème de Fejér** :

« La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f ».

Une application :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et de période 2π telle que la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, montrer que la suite $(S_n(f))$ converge vers la fonction f.

e) Si (u_n) est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant d_n$ (on pourra, par exemple, vérifier que la suite $(\sup\{u_k, k \geqslant n\})$ convient).

2) **Un exemple de Série de Fourier divergente (en un point)**

On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour tout entier naturel non nul n par : $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\sin\left[\left(2^{n^3}+1\right)\dfrac{x}{2}\right]$.

f) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On définit alors la fonction f paire, continue, de période 2π sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

g) On pose, pour p et k entiers naturels, $I_{p,k} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(pt)\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)\,dt$

et, pour q entier naturel, $T_{q,k} = \sum\limits_{p=0}^{q} I_{p,k}$.

i. Calculer, pour p et k entiers naturels, l'intégrale $I_{p,k}$.

ii. Pour q et k entiers naturels, déterminer un réel positif c_k tel que $T_{q,k} = c_k + \sum\limits_{j=k-q}^{k+q} \dfrac{1}{2j+1}$, et en déduire que, pour tout couple (q, k) d'entiers naturels, $T_{q,k} \geqslant 0$.

iii. Déterminer, pour N au voisinage de $+\infty$, un équivalent simple de $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{2k+1}$.

d. En déduire que, pour k au voisinage de $+\infty$, $T_{k,k} \sim \dfrac{1}{2}\ln k$.

h) Montrer que, pour p entier naturel non nul, $a_p(f) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} I_{p,2^{n^3}-1}$.

i) Montrer que, pour p entier naturel non nul, $S_{2^{p^3}-1}(f)(0) \geqslant \dfrac{-a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi p^2} T_{2^{p^3}-1,2^{p^3}-1}$

(on remarquera que : $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i = -\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{i=0}^{N} a_i$).

Conclure que la suite $(S_n(f)(0))$ diverge.

3) **Fonctions à variation bornée, Théorème de Jordan**

Pour deux réels $a < b$ on note $S_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

Si f est une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ et $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, , x_n) \in S_{[a,b]}$, on note :

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On dira que la fonction f est à variation bornée s'il existe un réel positif M tel que pour toute $\sigma \in S_{[a,b]}$, l'on ait : $V(\sigma, f) \leqslant M$.

On appelle alors **variation totale** de f sur $[a, b]$ le réel positif noté :

$$V([a, b], f) = \sup_{\theta \in S_{[a,b]}} V(\sigma, f).$$

j) Montrer que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ si $x \neq 0$ est continue et n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$.

(on pourra choisir $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ subdivision de $[0, 1]$: $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k = \dfrac{1}{2(n+1-k)}$).

k) Exemples généraux

i. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est monotone est à variation bornée sur $[a, b]$, et préciser $V([a, b], f)$.

ii. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est somme de deux fonctions monotones est à variation bornée sur $[a, b]$.

iii. Montrer qu'une fonction $[a, b] \to \mathbb{R}$ qui est continue et de classe C^1 par morceaux est à variation bornée.

l) Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée sur $[a, b]$, et soit $a < c < b$.

Montrer que chacune des restrictions de f aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ est à variation bornée et que : $V([a, c], f) + V([c, b], f) \leqslant V([a, b], f)$.

Remarque : on peut même montrer qu'il y a égalité mais ce ne sera pas utile pour ce problème.

m) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée.

Pour n entier relatif et N entier naturel, tous deux non nuls, on utilisera la subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant |n|N}$ de $[0, 2\pi]$ définie, pour k entier compris entre 0 et $|n|\,N$, par : $x_k = \dfrac{2\pi k}{|n|\,N}$.

Pour k entier compris entre 1 et $|n|\,N$, on notera $V_k(f)$ la variation totale de f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

i. Vérifier que : $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))\, e^{-int}\, dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)\,(x_k - x_{k-1})$.

ii. Montrer que : $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int}\, dt\right| \leqslant \frac{1}{|n|} V\left([0, 2\pi], f\right)$.

iii. En déduire que pour tout entier n non nul, $|c_n(f)| \leqslant \dfrac{V\left([0, 2\pi], f\right)}{2\,|n|\,\pi}$.

n) Soit (u_n) une suite de complexes, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j \text{ et } \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}.$$

On suppose que la suite (σ_n) converge vers un complexe L et on suppose qu'il existe une constante réelle A non nulle telle que, pour tout entier naturel k, $|u_k| \leqslant \dfrac{A}{k+1}$.

i. Pour n et k entiers naturels non nuls, exprimer, à l'aide des termes de la suite (u_i), l'expression : $k\,(S_n - L) - (n + k)\,(\sigma_{n+k-1} - L) + n\,(\sigma_{n-1} - L)$.

ii. Soit une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n, $|\sigma_n - L| \leqslant d_n$, montrer que, pour n et k entiers naturels non nuls :

$$|S_n - L| \leqslant \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + A\frac{k-1}{2(n+2)}.$$

iii. L'entier naturel non nul n étant donné, on choisit k tel que $(k-1)^2 \leqslant 4n^2 d_{n-1} < k^2$ ($k - 1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$).

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$|S_n - L| \leqslant d_{n-1} + (1 + A)\sqrt{d_{n-1}}$.

Que peut-on en déduire ?

o) Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée converge uniformément vers la fonction f.

p) Montrer que la série de Fourier de la fonction φ de la question **2.** converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

q) *Application*

Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période 2π et lipschitzienne converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

Fin

À la prochaine