PROBLÈMES CORRIGÉS MP

# Devoir Libre

## Phénomène de Gibbs (CCP 2008, PC)

5 FÉVRIER 2013

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique et impaire définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in ]0,\pi[, \quad f(x) = \pi/4 \\ f(0) = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$$

**1)** Tracer le graphe de $f$ sur deux périodes.

**2)** Déterminer la série de Fourier de $f$ exprimée à l'aide des coefficients de Fourier trigonométriques de $f$.

**3)** Etudier la convergence de la série de Fourier de $f$ sur $\mathbf{R}$. Lorsque cela est possible, donner la valeur de la somme de cette série.

**4)** **4a.** Soient $x \in ]0,\pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos[(2k+1)x] = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$.

*Indication : on pourra calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix}$ *en faisant apparaÓtre une suite géométrique.*

**4b.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction $g_n$ par : $\forall t \in ]0,\pi[, \quad g_n(t) = \dfrac{\sin(2nt)}{2\sin t}$.

Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\mathrm{d}t$, où $x \in ]0,\pi[$ ?

**4c.** Déterminer les zéros de $g_n$ sur $]0,\pi[$.

**5)** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère $S_{n-1}$ la somme partielle de la série de Fourier de $f$ au rang $N = n-1$.

**5a.** Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R},\ S_{n-1}(\pi - x) = S_{n-1}(x)$.

**5b.** Justifier que l'étude de la fonction $S_{n-1}$ peut être réduite à l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$.

**5c.** Calculer $S'_{n-1}(x)$ et en déduire :

$$\forall x \in [0,\pi[,\ S_{n-1}(x) = \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\mathrm{d}t$$

**5d.** Pour $k \in [\![0,n]\!]$ on définit $x_k = \dfrac{k\pi}{2n}$, et pour $k \in [\![1,n]\!]$ $I_k = \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ I_k = (-1)^{k-1}|I_k|$$

**5e.** En utilisant le changement de variable $u = t - x_{k-1}$ dans le calcul de $I_k$, montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ |I_{k+1}| \leqslant |I_k|$$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

**5f.** Déduire des questions **5c** à **5e** que le maximum $M_n$ de $S_{n-1}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est

$$M_n = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\mathrm{d}t$$

**6)** On va déterminer dans cette question $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

**6a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ : $M_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{4n\sin(\frac{t}{2n})}\mathrm{d}t$.

**6b.** On pose $\varphi$ définie sur $[0, \pi]$ par $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que $\varphi$ est bornée sur $[0, \pi]$. On notera $K$ un majorant de $\varphi$ sur cet intervalle.

**6c.** On pose $\psi$ définie sur $]0, \pi[$ par $\psi(x) = \dfrac{x}{\sin x} - 1$. Montrer que $\psi$ est monotone sur $]0, \pi[$.

**6d.** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ :

$$\left|M_n - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K}{2}\int_0^{\pi}\left|\frac{t/(2n)}{\sin[t/(2n)]} - 1\right|\mathrm{d}t$$

**6e.** Soit $a \in ]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\left|M_n - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K}{2}\Big(a + (\pi - a)\psi(\frac{\pi}{2n})\Big)$$

**6f.** En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

**7)** A l'aide du développement en série entière de la fonction sin, donner une expression de $M = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n$ comme somme d'une série numérique alternée.

**8)** Montrer que $M = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^3}{36} + \dfrac{\pi^5}{1200} + R$ avec $|R| \leqslant 0,1$.

**9)** Etablir le résultat suivant connu sous le nom de *Phénomène de Gibbs* : la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$, du maximum de la somme partielle au rang $n$ de la série de Fourier de $f$, est strictement supérieure au maximum de la fonction $f$.

Fin

**Á la prochaine**

✉ : mamouni.myismail@gmail.com