

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Phénomène de Gibbs (CCP 2008, PC)

5 FÉVRIER 2013

Soit f la fonction 2π -périodique et impaire définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, \pi[, & f(x) = \pi/4 \\ f(0) = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$$

- 1) Tracer le graphe de f sur deux périodes.
- 2) Déterminer la série de Fourier de f exprimée à l'aide des coefficients de Fourier trigonométriques de f .
- 3) Etudier la convergence de la série de Fourier de f sur \mathbf{R} . Lorsque cela est possible, donner la valeur de la somme de cette série.

4) 4a. Soient $x \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \cos[(2k+1)x] = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x}$.

Indication : on pourra calculer $\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix}$ en faisant apparaître une suite géométrique.

4b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction g_n par : $\forall t \in]0, \pi[, g_n(t) = \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t}$.

Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t} dt$, où $x \in]0, \pi[$?

- 4c. Déterminer les zéros de g_n sur $]0, \pi[$.
- 5) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère S_{n-1} la somme partielle de la série de Fourier de f au rang $N = n - 1$.
 - 5a. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}, S_{n-1}(\pi - x) = S_{n-1}(x)$.
 - 5b. Justifier que l'étude de la fonction S_{n-1} peut être réduite à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - 5c. Calculer $S'_{n-1}(x)$ et en déduire :

$$\forall x \in [0, \pi[, S_{n-1}(x) = \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t} dt$$
 - 5d. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on définit $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t} dt.$$
 Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, I_k = (-1)^{k-1} |I_k|$$
 - 5e. En utilisant le changement de variable $u = t - x_{k-1}$ dans le calcul de I_k , montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |I_{k+1}| \leq |I_k|$$

5f. Déduire des questions 5c à 5e que le maximum M_n de S_{n-1} sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est

$$M_n = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{2 \sin t} dt$$

6) On va déterminer dans cette question $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

6a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $M_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{4n \sin(\frac{t}{2n})} dt$.

6b. On pose φ définie sur $[0, \pi]$ par $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que φ est bornée sur $[0, \pi]$. On notera K un majorant de φ sur cet intervalle.

6c. On pose ψ définie sur $]0, \pi[$ par $\psi(x) = \frac{x}{\sin x} - 1$. Montrer que ψ est monotone sur $]0, \pi[$.

6d. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\left| M_n - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{K}{2} \int_0^{\pi} \left| \frac{t/(2n)}{\sin[t/(2n)]} - 1 \right| dt$$

6e. Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\left| M_n - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{K}{2} \left(a + (\pi - a) \psi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)$$

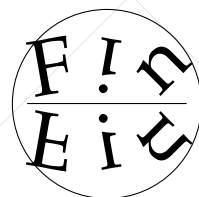
6f. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$$

7) A l'aide du développement en série entière de la fonction \sin , donner une expression de $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ comme somme d'une série numérique alternée.

8) Montrer que $M = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{36} + \frac{\pi^5}{1200} + R$ avec $|R| \leq 0,1$.

9) Etablir le résultat suivant connu sous le nom de *Phénomène de Gibbs* : la limite, quand n tend vers $+\infty$, du maximum de la somme partielle au rang n de la série de Fourier de f , est strictement supérieure au maximum de la fonction f .



À la prochaine