Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°25 (Pr. Taibi)

Séries de Fourier
Fonctions à variations bornées

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Quel est le grand jeu des fonctionnaires le lundi matin ?
Réponse : Le premier qui a bougé a perdu !
- Quel est le point commun entre un professeur qui part à la retraite et un et les gants d'un chirurgien ? Réponse : Ils sortent tous les deux du corps enseignant (en saignant).

Mathématicien du jour

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation.

1 Partie I : Résultats préliminaires

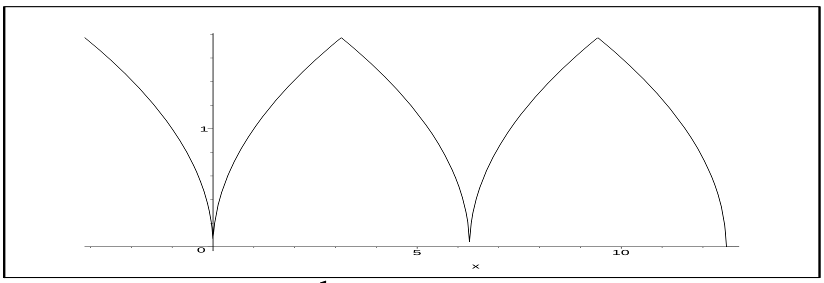
1 Dans le théorème de convergence normale on suppose seulement f continue par morceaux.

a C'est le théorème de Dirichlet de convergence simple :
$\cdot f$ est continue par morceaux et 2π -périodique
$\cdot f$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$
Alors $(S_p(f))_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f} : x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

b La convergence ne peut-être uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exemple : $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ 1 \text{ si } t \in [0, \pi[\end{cases}$ et f 2π- périodique

2 Représentation graphique de φ :



φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 par morceaux car $\lim\limits_{x \to 0} \varphi = +\infty$

3 théorème de Cesaro :

On suppose que la suite complexe (u_n) converge vers ℓ

a $\begin{cases} u_n - \ell = o(1) \\ \text{la serie } \sum\limits_{n\geqslant 0} 1 \quad \text{diverge} \end{cases}$ implique $\sum\limits_{k=0}^{n}(u_k-\ell) = o(\sum\limits_{k=0}^{n} 1) = o(n+1)$ (cours)

b Par ce qui précède $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}(u_k-\ell)}{n+1} = o(1)$. Mais $\sum\limits_{k=0}^{n}(u_k-\ell) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k - (n+1)\ell$, donc $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{n+1} - \ell \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0$.

4 On pose $\sigma_n(f) = \dfrac{1}{n+1}(S_0(f)+\ldots+S_n(f))$,

On suppose que $(S_n(f))_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Posons alors $g(x) = \lim\limits_n S_n(f)(x)$ pour tout x

Par le théorème de Fejer, $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de Cesaro $(\sigma_n)_n$ converge simplement vers g.

Donc $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

5 $(u_n)_n$ est une suite de réels telle que $\lim u_n = 0$. notons par $d_n = \sup\{u_k \ / \ k \geqslant n\}$, on a alors : $\forall k \geqslant n$, $0 \leqslant u_k \leqslant d_n$, en particulier $0 \leqslant u_n \leqslant d_n$.

D'autre part : $\{u_k \ / \ k \geqslant n+1\} \subset \{u_k \ / \ k \geqslant n\}$ et par passage à la borne sup, on a : $d_n \geqslant d_{n+1}$. Donc la suite $(d_n)_n$ est bien décroissante.

Vérifions que $(d_n)_n$ converge vers 0 pour conclure.

On a déja (d_n) est décroissante et positive, donc converge vers un réel $d \geqslant 0$.

Par définition de d, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ application strictemen croissante telle que : $\forall n,\ d \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant d + \dfrac{1}{n+1}$. Et comme $u_n \to 0$, il en résulte que $u_{\varphi(n)} \to 0$ et puis $d = 0$ par unicité de la limite.

2 Partie II : Exemple de série de Fourier divergente en un point.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une application telle que : $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\sin\left[(2^{n^3}+1)\dfrac{x}{2}\right]$

6 Pour tout $x \in [0,\pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (indépendement de x) , donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$.

7 $I_{p,k} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(pt)\sin(\frac{2k+1}{2}t)dt$, et $T_{q,k} = \sum\limits_{p=0}^{q} I_{p,k}$

a Calcul de $I_{p,k}$

$$\begin{aligned}
I_{p,k} &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(p+\frac{2k+1}{2})t + \sin(p-\frac{2k+1}{2})t\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{p+\frac{2k+1}{2}}\cos(p+\frac{2k+1}{2})t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{p-\frac{2k+1}{2}}\cos(p-\frac{2k+1}{2})t\right]_0^{\pi}\right) \quad (\ p \neq \frac{2k+1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\frac{2k+1}{2}} + \frac{1}{p+\frac{2k+1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2p-2k-1} + \frac{1}{2p+2k+1}
\end{aligned}$$

b $T_{p,k}$ en fonction des u_j :

$$\begin{aligned}
T_{p,k} = \sum_{p=0}^{q} I_{p,k} &= \sum_{p=0}^{q}\left(\frac{1}{2p-2k-1}+\frac{1}{2p+2k+1}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{q}\frac{1}{2(k-p)+1}+\sum_{p=0}^{q}\frac{1}{2(k+p)+1} \\
&= \sum_{j=k}^{k-q}\frac{1}{2j+1}+\sum_{j=k}^{k+q}\frac{1}{2j+1} \\
&= \sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1}+\frac{1}{2k+1}
\end{aligned}$$

Le réel c_k recherché est donc $c_k = \dfrac{1}{2k+1}$ qui est positif. Comme la quatité $\displaystyle\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1}$ est positif car $0 \leqslant |k-q| \leqslant k+q$, ilen résulte que $T_{q,k}$ est aussi positif ou nul .

c Quetion classique :

$\begin{cases} \dfrac{1}{2k+1} \sim \dfrac{1}{2k} > 0 \\ \sum \dfrac{1}{2k} \text{ diverge} \end{cases}$, donc, par le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1} \sim \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \sim \frac{1}{2}\ln(N)$$

d Équivalent de $T_{k,k}$:

On a : $T_{k,k} = \dfrac{1}{2k+1} + \displaystyle\sum_{j=0}^{2k}\frac{1}{2j+1} \sim \sum_{j=0}^{2k}\frac{1}{2j+1} \sim \frac{1}{2k}\ln(2k) \sim \frac{1}{2}\ln k$ car $\lim \ln(k) = +\infty$ et $\dfrac{1}{2}\ln(2)$ est constant.

8 f étant paire, 2π-périodiq et contiue sur $\mathbf{R}$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_p(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(pt)dt$.

Mais $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(2^{n^3}+1)\frac{t}{2}$ pour tout t$\in [0,\pi]$ et que la convergence de la série est unifrme sur $[0,\pi]$, donc :

$$\begin{aligned}
a_p(f) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(pt)\sin(2^{n^3}+1)\frac{t}{2}dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi.n^2}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(pt)\sin(2^{n^3}+1)\frac{t}{2}dt}_{I_{p,2n^3-1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi.n^2}I_{p,2n^3-1}, \quad k = 2^{n^3-1} \text{ de sorte que } 2k = 2^{n^3}
\end{aligned}$$

9 Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2p^3-1}(f)(0) &= \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{2p^3-1} a_k(f)\cos(k.0) = \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{2p^3-1} a_k(f) \\ &= -\frac{a_0}{2}(f)+\sum_{k=0}^{2p^3-1} a_k(f) \\ &= -\frac{a_0}{2}(f)+\sum_{k=0}^{2p^3-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi.n^2}I_{k,2n^3-1} \\ &= -\frac{a_0}{2}(f)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi.n^2}\sum_{k=0}^{2p^3-1} I_{k,2n^3-1} \\ & -\frac{a_0}{2}(f)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi.n^2}T_{2p^3-1,2p^3-1} \\ &\geqslant \underbrace{-\frac{a_0}{2}(f)+\frac{2}{\pi.p^2}T_{2p^3-1,2p^3-1}}_{=w_p} \end{aligned}$$

On sait que $T_{2p^3-1,2p^3-1}\sim\frac{1}{2}\ln(2^{p^3-1})=\frac{1}{2}(p^3-1)\ln(2)\sim\frac{1}{2}p^3\ln(2)$, donc $w_p\sim\frac{p}{\pi}\ln(2)\underset{p\to+\infty}{\to}+\infty$ et par suite $\sum_{p\geqslant1}S_{2p^3-1}(f)(0)$ diverge.

3 Partie III : Fonctions à variations bonées, théorème de Jordan

Pour $a<b$ deux réels, on pose $S[a,,b]$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$.

10 $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x\cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si } x\in]0,1]\end{cases}$

Montrons que f est continue sur $[0,1]$.

La fonction f est continue sur $]0,1]$ par opérations. L'application $x\mapsto\cos(\frac{\pi}{2x})$ est bornée sur $]0,1]$, donc $\lim_{x\to0^+}x.\cos(\frac{\pi}{2x})=0=f(0)$ et suite f est continue en 0. En conclusion f est continue sur $[0;1]$.

Montrons que f n'est pas à variation bornée sur $[0;1]$.

Soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}\in S_{[0;1]}$ telle que : $\begin{cases}x_0=0, & x_{n+1}=1\\ \forall k\in[\![1,n]\!], & x_k=\dfrac{1}{2(n+1-k)}\end{cases}$

Pour $n\geqslant2$ et $k\in[\![1,n-1]\!]$, on a :

$f(x_{k+1})-f(x_k)=\frac{1}{2(n-k)}\cos(\frac{p}{2\frac{1}{2}(n-k)})-\frac{1}{2(n+1-k)}\cos(\frac{\pi}{2\frac{1}{2(n+1-k)}})=\cos((n-k)\pi)-\cos((n+1-k)\pi)=(-1)^{n-k}\left(\frac{1}{2(n-k)}+\frac{1}{2(n+1-k)}\right)$, donc $|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-k)}+\frac{1}{2(n+1-k)}\right)$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$et par suite $V(\sigma,f)\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2(n-k)}+\frac{1}{2(n+1-k)}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)\underset{n\to\infty}{\to}+\infty$, donc f n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.

11 Exemples généraux :

a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une application monotone.

Lemme : f est variation bornée ssi $-f$ est à variation bornée

Pour $\lambda\in\mathbb{R}^*$, f est à variation bonée ssi λf est à variation bornée.

La preuve du lemme est évidente.
Quitte a changer f en $-f$, supposons f est croissante sur $[a,b]$ et soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,b]}$, alors : $f(x_{k+1})\geqslant f(x_k)$ pour tout $k\in[\![1;n-1]\!]$
et $V(\sigma,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k))=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a)$ pour tout $\sigma\in S_{[a,b]}$. D'où f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V([a,b],f)=f(b)-f(a)$.
En conclusion :
si f est monotone sur $[a,b]$, alors f est à variation bornée et $V([a,b],f)=|f(b)-f(a)|$

b Supposons $f=g+h$ avec g et h monotones sur $[a,b]$ et soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,b]}$, alors :
$V(\sigma,f)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|+\sum_{k=0}^{n-1}|h(x_{k+1})-h(x_k)|=|g(b)-g(a)|+|h(b)-h(a)|$. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V([a,b],f)\leqslant V([a,b],g)+V([a,b],h)$..

c $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ continue et C^1 par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,b]}$, alors $V(\sigma,f)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leqslant M(b-a)$ grâce à l'inégalité des accroissement finis appliquée a f sur $[x_k,x_{k+1}]$ avec $M=\max(\sup_{x\in[a,b]}\left|f'_d(x)\right|,\sup_{x\in[a,b]}\left|f'_g(x)\right|)$ où $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ désignent resp. les dérivées à droite et à gauche de f au point x.

12 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ une application à variation bornée, $c\in]a,b[$
Soient $\sigma_1\in S_{[a,c]}$, $\sigma_2\in S_{[c,b]}$ et $\sigma=\sigma_1\vee\sigma_2$ subdivision de $[a,b]$ obtenue par juxtaposition des deux subdivisions, alors $V(\sigma_1,f)\leqslant V(\sigma,f)\leqslant V([a,b],f)$ et $V(\sigma_2,f)\leqslant V(\sigma,f)\leqslant V([a,b],f)$, donc $f_{/[a,c]}$ et $f_{/[c,b]}$ sont à variations bornées .
On a aussi : $V([a,b],f)\geqslant V(\sigma,f)=V(\sigma_1,f)+V(\sigma_2,f)$ pour tous σ_1 et σ_2. On passe à la borne sup. sur les $\sigma_1\in S_{[a,c]}$ pour avoir :$V([a,b],f)\geqslant V([a,c],f)+V(\sigma_2,f)$ et puis à la borne sup. sur les σ_2 pour obtenir :
$$V([a,b],f)\geqslant V([a,c],f)+V([c,b],f)$$

13 Soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant|n|N}\in S_{[0,2\pi]}$ telle que $x_k=\dfrac{2k\pi}{|n|\,N}$.
Pour $k\in\{1,...,|n|\,N\}$, $V_k(f)=V([x_{k-1},x_k],\,f)$.

a Pour $t\in[x_{k-1},x_k]$, on utilisera la subdivision $x_{k-1}\leqslant t\leqslant x_k$ de $[x_{k-1},x_k]$:
$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt\right|\leqslant\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|(f(t)-f(x_k))|\,dt\leqslant\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}V_k(f)dt=\sum_{k=1}^{|n|N}V_k(f)(x_k-x_{k-1})$, donc :
$$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt\right|\leqslant\sum_{k=1}^{|n|N}V_k(f)(x_k-x_{k-1})$$

b $\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)e^{-int}dt\right|=\left|\sum_{k=1}^{|n|N}f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{-int}dt\right|$. Or $\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{-int}dt=-\dfrac{1}{in}\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right)$,
donc : $\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)e^{-int}dt\right|=\dfrac{1}{|n|}\left|\sum_{k=1}^{|n|N}f(x_k)\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right)\right|$, Mais

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right) &= \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_k} - \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_{k-1}}\\
&= \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_k} - \sum_{k=0}^{|n|N-1} f(x_{k+1})e^{-inx_k}\\
&= \sum_{k=0}^{|n|N-1} \left(f(x_k)-f(x_{k+1})\right)e^{-inx_k} + \underbrace{f(2\pi)e^{-i2n\pi}-f(0)e^{-inx_0}}_{=0}\\
&= \sum_{k=0}^{|n|N-1} \left(f(x_k)-f(x_{k+1})\right)e^{-inx_k}
\end{aligned},$$

donc $\left|\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{|n|N-1} |f(x_k)-f(x_{k+1})| = V([0,2\pi],f)$ et par suite :

$$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt\right| \leqslant \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)$$

c Par la question a) et l'inégalité triangulaire , on a :

$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int}dt\right| - \left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k))e^{-int}dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1})$, donc :

$$\begin{aligned}
2\pi|c_n(f)| &= \left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right|\\
&= \left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int}dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k))e^{-int}dt\right|\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f).
\end{aligned}$$

Or : $\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) \leqslant \frac{2\pi}{|n|N}\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) \leqslant \frac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f)$ (voir question 12)

D'où : $2\pi|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f) + \frac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f) = \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)\left(1+\frac{2\pi}{N}\right)$ et que $\frac{1}{|n|}V([0,2\pi$
$\frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)$ et par suite

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi|n|}V([0,2\pi],f) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{Z}^*$$

14 On pose $S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j$ et $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$ et suppose que $\sigma_n \to L$ et $\exists A>0$ tel que $|u_k| \leqslant \frac{A}{k+1}$ pour tout k

a Pour k et n des entiers naturels non nuls, on a :

$$\begin{aligned}
k(S_n-L)-(n+k)(\sigma_{n+k-1}-L)+n(\sigma_{n-1}-L) &= kS_n-(n+k)\sigma_{n+k-1}+n\sigma_{n-1}\\
&= kS_n - \sum_{j=0}^{n+k-1} S_j + \sum_{j=0}^{n-1} S_j\\
&= \sum_{j=0}^{k-1}(S_n-S_{j+n})\\
&= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} u_l
\end{aligned}$$

b Avec la relation précèdente et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} k|S_n - L| &\leqslant \left|\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} u_l\right| + |(n+k)(\sigma_{n+k-1} - L)| + |n(\sigma_{n-1} - L)| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} \frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} \text{ car } (d_n) \text{ est décroissante} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} j\frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} = \frac{k(k-1)}{2}\frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} \end{aligned}$$

D'où

$$|S_n - L| \leqslant \frac{(k-1)}{2}\frac{A}{n+2} + (1+\frac{2n}{k})d_{n-1}$$

c Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(k-1)^2 \leqslant 4n^2 d_{n-1} \leqslant k^2$, alors :

$$\begin{aligned} |S_n - L| &\leqslant (1+\frac{2n}{k})d_{n-1} + \frac{(k-1)}{2}\frac{A}{n+2} \\ &\leqslant d_{n-1} + \frac{2n}{k}d_{n-1} + \frac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}A \\ &\leqslant d_{n-1} + \frac{2n}{2n}\sqrt{d_{n-1}} + \frac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}A \\ &\leqslant d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}} \text{ car } \frac{2n}{2(n+2)} < 1 \end{aligned}$$

Comme (d_n) et décroissante et tend vers 0, la suite $(S_n)_n$ converge vers L.

15 Par le théorème de Fejer $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ .Soit $(d_n)_n$ une suite de reéls positifs telle que (d_n) est décroissante et tend vers 0 (appliquer le résultat de la question 5) à al suite $\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sigma_n(t) - f(t)|\right)_n$) et que $|\sigma_n(t) - f(t)| \leqslant d_n$ pour tout t.

Posons $\begin{cases} u_0(t) = c_0(f) \\ u_n(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ de sorte que $S_n(f)(t) = \sum_{j=0}^{n} u_j(t)$. On a alors :

$|u_n(t)| \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| \leqslant \dfrac{V([0,2\pi],f)}{n\pi} = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{V([0,2\pi],f)}{(n+1)\pi} \leqslant 2\dfrac{V([0,2\pi],f)}{(n+1)\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(voir question $13.c$)). et que $|u_0(t)| = |c_0(f)|$

Donc : $|u_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \max(|c_0(f)|, 2\dfrac{V([0,2\pi],f)}{\pi})$.

Par la question 14) , pour tout réel t on a : $|S_n(f)(t) - f(t)| \leqslant d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$ et par suite $(S_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

16 φ étant continue et 2π-périodique. En écrivant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où $\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ \sqrt{t} \text{ si } t \in [0,\pi] \end{cases}$ et $\varphi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{-t} \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ 0 \text{ si } t \in [0,\pi] \end{cases}$, on a laors φ est à variation bornée sur $[-\pi,\pi]$ car φ est somme de deux fonctions monotones.

Par la question 15), la série de Fourier de φ converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$.

17 Application :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ application 2π-périodique et α-lipschitzienne, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus si $\sigma = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in S_{[-\pi,\pi]}$, alors $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \alpha|x_{k+1} - x_k| = \alpha(x_{k+1} - x_k)$ et par suite : $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \alpha 2\pi$. Donc f est à variation bornée et d'après ce qui précède : (question 15) la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.