XM6-CPGE My Youssef

Devoir Libre 15 Bis

Séries de Fourier

Rabat le 5 mars 2010

Blague du jour :

• Quel est le grand jeu des fonctionnaires le lundi matin ?
Réponse : Le premier qui a bougé a perdu !
• Quel est le point commun entre un professeur qui part à la retraite et un et les gants d'un chirurgien ? Réponse : Ils sortent tous les deux du corps enseignant (en saignant) .

Mathématicien du jour **Bessel**
Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) est un astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation.

Source : Concours, St-Cyr, 1992.

Dans le problème, n désigne un entier naturel non nul.

Il est possible de traiter les deux parties du problème de façon indépendante.

PREMIÈRE PARTIE

1 - On considère la série de fonctions numériques de la variable réelle x, de terme général $u_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$.

a) Etudier la convergence de cette série.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique.

c) Calculer l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

d) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_p : $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(px)\,dx$.

e) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est-elle le développement en série de Fourier de f ?

2 - Soit $\alpha \in]0, \pi[$ un réel fixé. Dans cette question et la suivante, on se limite aux valeurs de x du segment $[\alpha, \pi]$.

a) On pose $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$.

Montrer que la différence : $s_n(x) - \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est une constante que l'on précisera.

En déduire un majorant de $|s_n(x)|$ indépendant de n et de $x \in [\alpha, \pi]$.

b) Montrer que, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k(x)}{k(k+1)} + \frac{s_n(x)}{n}$.

c) Justifier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général : $\dfrac{s_k(x)}{k(k+1)}$, $k \geq 1$, sur le segment $[\alpha, \pi]$.

d) Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général : $\dfrac{\sin(kx)}{k}$, $k \geq 1$, sur le segment $[\alpha, \pi]$.

e) Montrer que f est dérivable sur $]0, \pi]$ et écrire sa dérivée à l'aide d'une série de fonctions que l'on ne cherchera pas à sommer. Préciser la valeur de $f'(\pi)$.

f) La série définissant f est-elle deux fois dérivable terme à terme ? En d'autres termes, que peut-on dire de la série de terme général $u_n''(x)$?

3- a) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique qui converge vers L. Montrer qu'il en est de même de la suite définie pour $n \geq 1$ par : $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$.

b) On pose : $\sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ et $\Sigma_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma_k(x)$.

$\sigma_n'(x)$ désignant la dérivée de $\sigma_n(x)$, montrer que la différence : $\sigma_n'(x) - \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est une constante que l'on précisera.

c) Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) - \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+2)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

d) En déduire une expression simple de la dérivée $\Sigma_n'(x)$. Montrer que la suite de fonctions $\Sigma_n'(x)$ converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$ vers une fonction que l'on précisera.

e) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, \pi]$.

f) En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout réel x. Représenter graphiquement la fonction f.

4 - a) Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

b) Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

DEUXIÈME PARTIE

1 - a désignant un paramètre strictement positif, développer en série de FOURIER la fonction f_a paire et 2π-périodique définie pour $x \in [0, \pi]$ par :

$$f(x) = a^2(x-\pi)^2.$$

2 - On définit la fonction h_a par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_a(x) = 4a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+a^2}.$$

Montrer que h_a est continue, paire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

3 - a) Ecrire $f_a(x) - h_a(x)$ sous la forme de la somme d'une série trigonométrique.

b) Montrer que $f_a - h_a$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que h_a possède une dérivée à droite en $x = 0$ et une dérivée à gauche en $x = \pi$ que l'on précisera.

d) Exprimer la dérivée seconde $(f_a - h_a)''$ en fonction de h_a.

e) En déduire qu'il existe trois constantes réelles A, B et C telles que, pour $x \in [0, \pi]$:

$$h_a(x) = A\,\mathrm{ch}(ax) + B\,\mathrm{sh}(ax) + C.$$

f) Déterminer A, B et C.

4 - Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$.
Pour $a = 0$, obtient-on les valeurs trouvées au I-4-a ? Justifier.

5 - Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2}$, en utilisant un procédé analogue.

Fin

À la prochaine