.

Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé N°6 (28 mars 2011, 4 heures)

Séries de fonctions, entières Séries de Fourier Intégrales à paramètre

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Des suites de Gauchers (Cauchy) adjacents (voisins) ont envie de s'amuser, et elles décident de converger à une soirée "sans-limite". Mais à l'entrée, on leur affiche que : "C'est complet !" et on les conseille d'aller voir ailleurs où est organiser une soirée "avec-limite" plus adaptée à leur nature de Gauchers.

Mathématicien du jour

Abou dHamid Modhammed ibn Modhammed al-Ghazālī (1058-1111)

Penseur musulman d'origine persane. Personnage emblématique dans la culture musulmane, déçu dans sa recherche d'une vérité philosophique finale, il s'oriente vers un mysticisme profond refusant toute vérité aux philosophes et les accusant d'infidélité dans son ouvrage Tahafut al-Falasifa.

1 Problème : Séries de Fourier et la fonction Gamma (CCP 2003, PC)

1.1 PARTIE I

Pour tout nombre réel $u \in]0,1[$, on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :

-Pour tout $t \in [-\pi, \pi[$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,

-La fonction φ_u est périodique de période 2π.

Soit $\frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u)\cos nt$ la série de Fourier de la fonction φ_u.

I.1 Calculer $a_n(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction φ_u est-elle égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier ?

I.2 En déduire pour tout $u \in]0,1[$, l'égalité :

$$\frac{\pi\cos\pi u}{\sin\pi u} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2-n^2}.$$

I.3 Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[0,1[$, et que la série de fonctions de terme général $u_n'(x)$ converge normalement sur tout segment $[0,a] \subset [0,1[$.

En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

I.4 Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \qquad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Nous noterons s sa limite.

I.4.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s_n(x+1) = \dfrac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$.
En déduire que $s(x+1) = -s(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.4.3 Calculer $s(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$.

1.2 PARTIE II

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1)\dots(x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

II.1 .

II.1.1 Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre entier naturel. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(-p)$.

II.1.2 On suppose que x n'est pas un nombre entier négatif ou nul.
Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite non nulle (on pourra considérer la série de terme général $\ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, définie à partir d'un certain rang N_x que l'on déterminera en fonction de x).
Nous noterons f la fonction $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = xf(x+1)$.
Calculer $f(1)$ et en déduire $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)f(1-x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$.
On pourra étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ le rapport $\dfrac{f_n(x) f_n(1-x)}{s_n(x)}$.

II.4 On se propose dans cette question de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a la relation :

$$(1) \qquad f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

II.4.1 Montrer que la relation (1) est vérifiée lorsque px est entier négatif ou nul.

II.4.2 On suppose que px n'est pas entier négatif, et soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\prod\limits_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\dfrac{k}{p}\right)}$ ne dépend pas de x. En déduire que f vérifie une relation du type :

$$f(px) = A_p \, p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

où A_p est un nombre réel positif ou nul dépendant de p.

II.4.3 En écrivant pour $x = \dfrac{1}{p}$ la relation ci-dessus, montrer que :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1 - \frac{k}{p}\right) = 1.$$

En déduire une expression de A_p^2 en fonction de p et de $\prod\limits_{k=1}^{p-1} \sin \dfrac{k\pi}{p}$.

II.4.4 Montrer l'identité suivante entre fonctions polynômes de la variable réelle x :

$$(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2=\prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1\right).$$

En donnant à x la valeur 1, en déduire les valeurs de $\displaystyle\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}$ et de A_p, ainsi que la relation (1).

1.3 PARTIE III

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

III.1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ et montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

III.2 Pour tout $x\in]0,+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $G_n(x)=\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$.

III.2.1 On pose $g_n(x)=\displaystyle\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,du$. Déterminer une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x+1)$ et en déduire l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x et n.

En déduire que $G_n(x)=\dfrac{n}{(n+x)f_n(x)}$.

III.2.2 Montrer que pour tout $t\in[0,n]$ on a les inégalités $e^{-t}\geq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ et $e^t\geq\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$. En déduire que l'on a $0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$ pour tout $t\in[0,n]$.

III.2.3 Montrer, par récurrence sur n, que l'on a $(1-a)^n\geq 1-na$ pour tout $a\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$.

En déduire que pour tout $t\in[0,n]$ on a les inégalités :

$$0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq\frac{t^2e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Déduire de ce qui précède la limite, pour $x\in]0,+\infty[$, de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et exprimer $f(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$.

III.3 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 Exercice 1 : Étude d'un cylindre (cnc 89, MP)

3 Exercice 2 : séries entière équivalente (e3a 2006, MP)

5. *Application* :

Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de : $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 2.

Soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes strictement positifs et telles que : $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

On suppose d'autre part que la fonction $f : t \mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur $\mathbf{R}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : t \mapsto g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$?

2. Justifier l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et telle que :

$$\forall\ n \in \mathbf{N},\quad a_n = b_n\ (1+\gamma_n)$$

3. Soit $m \in \mathbf{N}$.

3.1. Prouver l'existence de $\delta_m = \sup\limits_{n\geqslant m} |\gamma_n|$.

3.2. Montrer que :

$$\forall\ t>0,\ \forall\ m \in \mathbf{N},\ \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \delta_m + \frac{1}{b_{m+1}\, t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n\, t^n.$$

3.3. En déduire que : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Applications :

4. Soit h la fonction définie par : $t \mapsto h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!}\, t^n$.

4.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

4.2. Trouver un équivalent de $h(t)$ au voisinage de $+\infty$.

5. Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}$:

$$t y''(t) + (1-t) y'(t) = 1$$

5.1. Démontrer que (E) possède une unique solution z développable en série entière à l'origine telle que : $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

Préciser les coefficients de ce développement.

5.2. Donner une expression simple de $z'(t)$ pou

5.3. Trouver un équivalent de $z(t)$ au voisina

Fin

Bonne Chance