Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

.

Mamouni My Ismail

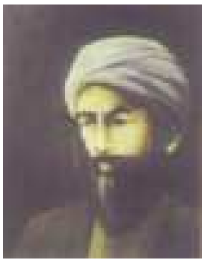
Corrigé Devoir Surveillé N°6

Séries de fonctions, entières
Séries de Fourier
Intégrales à paramètre

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

pour l'optimiste le verre est à moitié plein
pour le pessimiste il est à moitié vide
pour l'ingénieur sa capacité n'est pas à son rendement maximum



Abu Muhammad Abdullah Ibn Ahmad Ibn al-Bitar (?-1248)

Mathématicien du jour

was one of the greatest scientists of Muslim Spain and was the greatest botanist and pharmacist of the Middle Ages. He was born in the Spanish city of Malaqa (Malaga) towards the end of the twelfth century. He learned botany from Abu al-Abbas al-Nabati, a learned botanist, with whom he started collecting plants in and around Spain. In 1219 he left Spain on a plant-collecting expedition and travelled along the northern coast of Africa as far as Asia Minor. The exact modes of his travel (whether by land or sea) are not known, but the major stations he visited include Bouaghia, Constantine, tunis, Tripoli, Barqa and Adalia. After 1224, he entered the service of al-kamil, the Egyptian Governor, and was appointed chief herbalist. In 1227, al-kamil extended his domination to Damascus, and Ibn al-Bitar accompanied him there which provided him an opportunity to collect plants form stations located there.

1 Problème (CCP 2003, PC) : Corrigé Pr. Crépy

1.1 PARTIE I

Pour tout nombre réel $u \in]0,1[$, on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :

-Pour tout $t \in [-\pi,\pi[$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,

-La fonction φ_u est périodique de période 2π.

I.1 La fonction φ_u est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'établir la continuité en π pour en déduire, par 2π-périodicité, la continuité de φ_u sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \in [\pi, 3\pi[$,on a $\varphi_u(t) = \varphi_u(t-2\pi) = \cos u(t-2\pi)$ et $\lim\limits_{t\to\pi_+} \varphi_u(t) = \cos u\pi$ qui est égal à $\lim\limits_{t\to\pi_-} \varphi_u(t)$. cqfd

La continuité en π permet d'écrire $\varphi_u(t) = \cos ut$ pour tout $t \in [-\pi,\pi]$.

Etablissons maintenant la parité de φ_u sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $t \in [(2n-1)\pi,(2n+1)\pi[$. On a donc $\varphi_u(t) = \varphi_u(t-2n\pi)$.

φ_u est clairement paire sur $[\pi,\pi]$ donc $\varphi_u(t-2n\pi) = \varphi_u(2n\pi - t)$.

Enfin $\varphi_u(-t+2n\pi) = \varphi_u(-t)$ car $-t \in](-2n-1)\pi,(-2n+1)\pi]$. cqfd

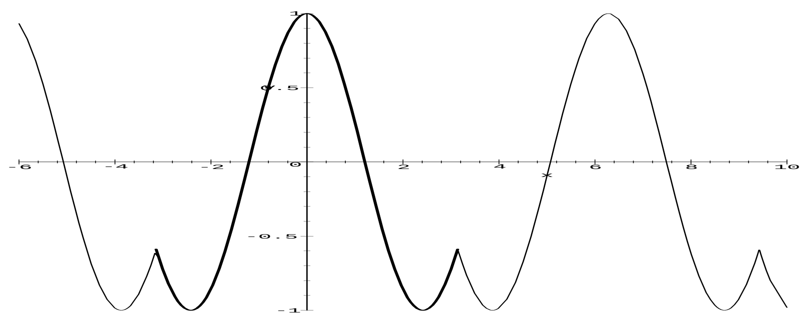


Figure 1 : graphe de $\varphi(u)$ pour $u = 1.3$

Il en résulte que

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_u(t)\cos nt\,dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} a_n(u) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ut \cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(u-n)t + \cos(u+n)t\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(u-n)t}{u-n} + \frac{\sin(u+n)t}{u+n}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2u\sin u\pi}{u^2-n^2}. \end{aligned}$$

La fonction φ_u est de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers φ_u. Comme φ_u est paire, on a $b_n(u) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_u(t) = \frac{\sin u\pi}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2u\sin u\pi}{u^2-n^2}\cos nt.$$

I.2 Pour $t = \pi$ le calcul de la somme de la série de Fourier de φ_u donne, après division par $\sin \pi u \neq 0$:

$$\forall u \in]0,1[, \quad \frac{\pi\cos\pi u}{\sin\pi u} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2-n^2},$$

d'où l'égalité demandée.

I.3 On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, on a $u_n(x)$ défini, négatif et équivalent à $-\frac{x^2}{n^2}$ lorsque $n \to +\infty$, ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$.

La fonction u_n est de classe C^1 sur $[0,1[$ avec $u_n'(x) = \frac{2x}{x^2-n^2}$.

Pour tout $x \in [0,a]$ avec $[0,a] \subset [0,1[$, on a $|u_n'(x)| \leq \frac{2a}{n^2-a^2}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente, ainsi la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment $[0,a]$.

Il en résulte, d'après le théorème de dérivation d'une série de fonctions, que la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et que

$$\forall x \in [0,1[, \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} \underset{\text{I.2}}{=} \frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} - \frac{1}{x}.$$

Ainsi pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \int_0^x \frac{\pi\cos\pi u}{\sin\pi u} - \frac{1}{u}\,du + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0)}_{=0} = \left[\ln\frac{\sin\pi u}{u}\right]_0^x = \ln\frac{\sin\pi x}{x} - \ln\pi = \ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

I.4 Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x)=x,\qquad s_n(x)=\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)s_{n-1}(x)\text{ pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Pour tout $n\geq |x|$, on a $|s_n(x)|\leq |s_{n-1}(x)|$ et $s_n(x)$ de même signe que $s_{n-1}(x)$. La suite $(|s_n(x)|)_{n\geq|x|}$ est décroissante et positive, donc convergente.
Comme la suite $(s_n(x))_{n\geq|x|}$ est de signe constant, elle est donc égale, au signe près, à la suite convergente $(|s_n(x)|)_{n\geq|x|}$.
Ainsi, la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction s.

I.4.2 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$ avec $n\neq x$ (non précisé dans l'énoncé).
Par définition, on a $s_n(x)=x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)=\frac{1}{n!^2}\prod_{k=1}^{n}(k-x)\prod_{k=0}^{n}(k+x)$. Il en résulte, avec des changements d'indices, que

$$\begin{aligned}s_n(x+1)&=\frac{1}{n!^2}\prod_{k=1}^{n}(k-x-1)\prod_{k=0}^{n}(k+x+1)=\frac{1}{n!^2}\prod_{k=0}^{n-1}(k-x)\prod_{k=1}^{n+1}(k+x)\\&=\frac{1}{n!^2}\frac{-x}{n-x}\prod_{k=1}^{n}(k-x)\times(n+1+x)\prod_{k=1}^{n}(k+x)=-\frac{n+1+x}{n-x}s_n(x),\end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.
Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, l'égalité $s_n(x+1)=\frac{x+n+1}{x-n}s_n(x)$ est valable pour tout $n>|x|$. Le passage à la limite lorsque $n\to+\infty$ donne $s(x+1)=-s(x)$.

I.4.3 La fonction s est nulle en 0, car $s_n(0)=0$ pour tout n.
Pour $x\in]0,1[$, on a $s_n(x)>0$ et $\ln s_n(x)=\ln x+\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$, ainsi, d'après I.3, $\lim_{n\to+\infty}\ln s_n(x)=\ln x+\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\ln\frac{\sin\pi x}{\pi}$.
La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{n\to+\infty}s_n(x)=e^{\ln\frac{\sin\pi x}{\pi}}$, soit $s(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n=\lfloor x\rfloor$ sa partie entière. On a donc $s(x)=(-1)^n s(x-n)$ et $x-n\in[0,1[$, ainsi $s(x)=(-1)^n\frac{\sin\pi(x-n)}{\pi}$.
On obtient donc $s(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Dans la littérature, ce résultat est appelé “développement eulérien de sinus”.

1.2 PARTIE II

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\frac{n^{-x}}{(n-1)!}x(x+1)\dots(x+n-1)=\frac{n^{-x}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k).$$

II.1 .

II.1.1 Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour $n\geq p+1$, on a $f_n(-p)=0$, ainsi $\lim_{n\to+\infty}f_n(-p)=0$.

II.1.2 On suppose que $x\notin\mathbb{Z}^-$. On a donc $f_n(x)\neq 0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour tout $n>-x$, on a $f_{n+1}(x)$ de même signe que $f_n(x)$.
En posant $N_x=\max\{1,-\lfloor x\rfloor\}$, on obtient donc $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}>0$ pour tout $n\geq N_x$.
Le calcul donne $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)$ et

$$\ln\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=-x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi la série de terme général $\ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, définie à partir du rang N_x est convergente.

Pour tout $n \geq N_x$, un télescopage des termes donne $\displaystyle\sum_{k=N_x}^{n} \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = \ln \frac{f_{n+1}(x)}{f_{N_x}(x)}$ ce qui implique $f_{n+1}(x) = f_{N_x}(x)e^{S_n(x)}$ où $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=N_x}^{n} \ln \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$ est le terme général d'une suite convergente (vers $S(x)$) .

Il en résulte que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f_{N_x}(x)e^{S(x)} \neq 0$.

On note f la fonction $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.2 Pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient, après calculs, $f_{n+1}(x) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-x} x f_n(x+1)$.

Le passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ donne alors $f(x) = xf(x+1)$.

On a $f_n(1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $f(1) = 1$. Avec la relation $f(x) = xf(x+1)$, on établit, par récurrence sur n, que $f(n) = \dfrac{1}{(n-1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3 Si $x \in \mathbb{Z}$, l'un des entiers x ou $1-x$ est négatif ou nul donc $f(x)f(1-x) = 0 = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$.

Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, alors $s_n(x) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, après calculs, on obtient $\dfrac{f_n(x)f_n(1-x)}{s_n(x)} = \dfrac{n}{n+x}$. Le passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ donne alors l'égalité demandée $f(x)f(1-x) = s(x)$, appelée “formule des compléments” dans la littérature.

II.4 On se propose d'établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$(1) \qquad f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right).$$

Nota : comme la relation (1) est trivialement vérifiée pour $p = 1$, on supposera désormais $p \geq 2$, ce qui rendra cohérent le produit écrit dans II.4.4

II.4.1 On suppose $px = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $f(px) = 0$ d'après II.1.1.

Une division euclidienne donne $n = pq + r$ avec $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ et $r \in [0, p[$. Pour $k = r$, on a $x + \dfrac{k}{p} = -q$, ainsi $f\left(x+\dfrac{k}{p}\right) = 0$ d'après II.1.1, ce qui annule la partie droite de (1).

La relation (1) est donc vérifiée lorsque $px \in \mathbb{Z}^-$.

II.4.2 On suppose que px n'est pas entier négatif, et soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. On a

$$p^{px-1} f_{pn}(px) = \frac{p^{-1}n^{-px}}{(pn-1)!} \prod_{j=0}^{pn-1} (px+j).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right) &= \prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{n^{-\left(x+\frac{k}{p}\right)}}{(n-1)!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(x+\frac{k}{p}+i\right)\right) \\ &= \frac{n^{-\left(px+\frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p} \frac{1}{p^{pn}} \prod_{k=0}^{p-1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (px+k+ip)\right).\end{aligned}$$

Pour chaque $i \in [0, n[$ et k variant dans $[0, p[$, les entiers $ip + k$ décrivent l'ensemble $[ip, (i+1)p[$. La réunion donne l'ensemble $[0, np[$, ainsi

$$\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right) = \frac{n^{-\left(px+\frac{p-1}{2}\right)} p^{-pn}}{[(n-1)!]^p} \prod_{j=0}^{pn-1} (px+j).$$

Il en résulte que $\dfrac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right)}$ est égal à $p^{pn-1} n^{\frac{p-1}{2}} \dfrac{[(n-1)!]^p}{(pn-1)!}$ qui est strictement positif et ne dépend pas de x.

Le terme de gauche admet une limite égale à $\dfrac{p^{px-1}f(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right)}$ lorsque $n \to +\infty$.

Il en résulte que le terme de droite admet une limite, positive ou nulle et qui ne dépend que de p, lorsque $n \to +\infty$. On la note A_p. On obtient alors l'égalité demandée

$$f(px) = A_p\, p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right).$$

II.4.3 Pour $x = \dfrac{1}{p}$ la relation ci-dessus, donne $f(1) = A_p \prod_{k=0}^{p-1} f\left(\dfrac{1+k}{p}\right)$.

Sachant que $f(1) = 1$, un décalage d'indices $k+1 \to k$ donne $A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\dfrac{k}{p}\right) = 1$.

Le changement de parcours des indices $k \to p-k$ donne l'autre égalité :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1-\frac{k}{p}\right).$$

Avec le produit de deux et le résultat II.3, on obtient $A_p^2 \prod_{k=1}^{p-1} \dfrac{\sin\frac{k\pi}{p}}{\pi} = 1$ ainsi

$$A_p^2 = \frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sin\frac{k\pi}{p}}.$$

II.4.4 On a $(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1) = x^p-1$, ainsi le polynôme $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ a pour zéros complexes, les $p-1$ racines de l'unité $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ avec $k = 1,\ldots,p-1$.

Le polynôme $x^2-2x\cos\dfrac{2k\pi}{p}+1$ a pour zéros complexes, les 2 racines de l'unité $e^{\frac{2ik\pi}{p}} = z_k$ et $e^{-\frac{2ik\pi}{p}} = \overline{z_k} = z_{p-k}$. Ainsi le polynôme $\prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\dfrac{2k\pi}{p}+1\right)$, de degré $2p-2$, a pour ensemble de zéros $\{z_k, z_{p-k}/k = 1,\ldots,p-1\}$.

Il coïncide avec l'ensemble des zéros de $(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2$ de même degré et même coefficient dominant, ainsi

$$(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1\right).$$

En donnant à x la valeur 1, on obtient

$$p^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \underbrace{2-2\cos\frac{2k\pi}{p}}_{4\sin^2\frac{k\pi}{p}} = 4^{p-1}\left(\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}\right)^2.$$

Il en résulte, connaissant le signe, que $\prod_{k=1}^{p-1}\sin\dfrac{k\pi}{p} = \dfrac{p}{2^{p-1}}$.

Avec le dernier résultat de II.4.3, sachant que $A_p \geq 0$, il vient $A_p = \dfrac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$.

Combiné avec la relation établie en II.4.2, on obtient l'égalité (1) demandée, appelée “formule multiplicative de Gauss” dans la littérature.

1.3 PARTIE III

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

III.1 Pour $x \in \mathbb{R}$, l'application $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.
On a $h_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, ainsi h_x est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x > 0$.

On a $h_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ainsi h_x est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout x.
Il en résulte que la fonction Γ est définie sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[$.
La fonction $h : (x, t) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[^2$, ainsi que chacune de ses dérivées partielles $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k} : (x, t) \mapsto \ln^k t\, e^{-t}t^{x-1}$.
Pout tout segment $[a, b] \subset \mathcal{D}$ et tout $(x, t) \in [a, b]\times]0, +\infty[$, on a

$$|h(x, t)| \leq \phi_{[a,b]}(t)| \text{ et } \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)\right| \leq \ln^k t\ \phi_{[a,b]}(t) \text{ où } \phi_{[a,b]}(t) = e^{-t}\max\{t^{a-1}, t^{b-1}\}.$$

Comme les fonctions $\phi_{[a,b]}$ et $\ln^k t\phi_{[a,b]}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$, il résulte des théorèmes sur la continuité et la dérivation des intégrales à paramètre, sur un intervalle, que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

III.2 Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $G_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$.

III.2.1 Soit $g_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1 - u)^n u^{x-1}\,du$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$.
Une intégration par parties, valide, donne pour $n \geq 1$:

$$g_n(x) = \underbrace{\left[(1 - u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1}_{0} + \int_0^1 n(1 - u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\,du = \frac{n}{x}g_{n-1}(x + 1).$$

Il en résulte que $g_n(x) = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{x(x+1)\ldots(x+k-1)}g_{n-k}(x+k)$ pour tout $k \in [1, n]$. Après calculs, on obtient$g_0(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g_n(x) = \dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $t = nu$ donne $g_n(x) = n^{-x}G_n(x)$.
En remplaçant par la valeur de $f_n(x)$, non nulle, on obtient $G_n(x) = \dfrac{n}{(n+x)f_n(x)}$.

III.2.2 On vérifie aisément (étude directe ou convexité) que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $e^{\frac{t}{n}} \geq 1 + \dfrac{t}{n} \geq 0$ et $e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \dfrac{t}{n} \geq 0$ pour tout $t \in [0, n]$.
En élevant à la puissance n, on obtient les inégalités demandées : $e^{-t} \geq \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ et $e^t \geq \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n$.
On en déduit que, pour tout $t \in [0, n]$,

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

III.2.3 Soit $a \in [0, 1]$. L'inégalité $(1 - a)^n \geq 1 - na$ est vérifiée pour $n = 1$.
Supposons-la vérifiée pour $n \geq 1$, alors

$$(1 - a)^{n+1} = (1 - a)(1 - a)^n \geq (1 - a)(1 - na) = 1 - (n + 1)a + na^2 \geq 1 - (n + 1)a.$$

Il en résulte, par récurrence sur n, que l'on a $(1 - a)^n \geq 1 - na$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En combinant avec le dernier résultat de III.2.2, on obtient

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}\left[1 - \left(1 - n\frac{t^2}{n^2}\right)\right] = \frac{t^2e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Pour $x \in]0, +\infty[$, on a

$$0 \leq \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1}\, dt = \Gamma(x) - G_n(x) - \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt \leq \int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\, dt.$$

L'existence de $\Gamma(x)$ implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt = 0$.

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^n \frac{t^{x+1} e^{-t}}{n}\, dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \Gamma(x)$.

D'après III.2.1, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, ainsi $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(x)}$.

Cette expression de $\Gamma(x)$ est appelée "forme limite d'Euler" dans la littérature.

III.3 D'après III.1 et III.2.4, on a f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

Avec la relation $f(x) = xf(x+1)$, on établit, par récurrence sur n, la classe C^∞ de f sur $]-n, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 Exercice 1, cnc 89, MP : Corrigé Pr. Saddiki

.

3 Exercice 2, e3a 2006, MP : Corrigé Pr. Girard

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, t^n$ est de rayon infini et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, t^n$ est absolument convergente.

1. Pour tout $t>0$, $|b_n|\, t^n \underset{n\to\infty}{\sim} |a_n|\, t^n$ donc la convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, t^n$ entraine la convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 0} b_n\, t^n$: la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n\, t^n$ est de rayon de convergence infini, c'est-à-dire $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
2. Avec $b_n>0$, on a $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=1$.

   En posant $\gamma_n=\frac{a_n}{b_n}-1$, on a $a_n=b_n\,(1+\gamma_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$.
3. a) Pour tout $m\in\mathbb{N}$, la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant m}$ étant convergente, elle est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un $\delta_m=\sup\limits_{n\geqslant m}|\gamma_n|$: pour tout $n\geqslant m$, $|\gamma_n|\leqslant\delta_m$.

   b) Pour tout $t>0$, on a $g(t)>\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} b_n\, t^n > b_{m+1}\, t^{m+1}>0$, puis
   $$\frac{f(t)}{g(t)}-1=\frac{f(t)-g(t)}{g(t)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\, b_n\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n},$$
   $$\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|\leqslant\frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\, b_n\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n}+\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}|\gamma_n|\, b_n\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n}\leqslant\frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\, b_n\, t^n}{b_{m+1}\, t^{m+1}}+\delta_m\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n},$$
   et finalement $\boxed{\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|\leqslant\frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\, b_n\, t^n}{b_{m+1}\, t^{m+1}}+\delta_m}$.

   c) On a donc $\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|\leqslant\delta_m+\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\,\frac{b_n}{b_{m+1}}\,\frac{1}{t^{m-n+1}}$.

   La convergence de la suite (γ_n) vers 0 entraine la convergence de la suite (δ_n) vers 0, donc si $\varepsilon>0$ est fixé il existe un N de $\mathbb{N}$ tel que $m\geqslant N$ entraine $\delta_m\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

   Alors pour tout n de $[\![0,N]\!]$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty}|\gamma_n|\,\frac{b_n}{b_{N+1}}\,\frac{1}{t^{N-n+1}}=0$, donc pour tout n de $[\![0,N]\!]$, il existe un $\alpha_n>0$ tel que $t\geqslant\alpha_n$ entraine
   $$|\gamma_n|\,\frac{b_n}{b_{N+1}}\,\frac{1}{t^{N-n+1}}<\frac{\varepsilon}{2\,(N+1)}.$$
   Finalement, si $A=\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N}\alpha_n$, pour tout $t\geqslant A$ on a
   $$\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+(N+1)\,\frac{\varepsilon}{2\,(N+1)}=\varepsilon.$$
   Cela signifie $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1$, c'est-à-dire $\boxed{f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}g(t)}$.
4. a) On a $\ln[(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}]=(n+1)\,\ln(1+\frac{1}{n+1})$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,\ln(1+\frac{1}{n+1})=1$, c'est-à-dire par continuité de la fonction exponentielle $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=\mathrm{e}$.

   On en déduit que pour tout t de $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\,\frac{t^n}{n!}=0$: avec le lemme d'Abel, la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\,\frac{t^n}{n!}$ est de rayon infini, c'est-à-dire que $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

b) Avec $\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n!}$ et ce qui précède on a $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, c'est-à-dire finalement $\boxed{h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{t+1}}$.

5. a) Soit $y(t) = t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ solution de (E) sur in intervalle $I \subset]-R, R[$.
Pour tout t de $]-R, R[$, on a

$$y'(t) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n t^{n-1},\ y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-2},$$

$$\text{et } \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n t^{n-1} + [1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n t^{n-1}] - t - \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n t^n = 1,$$

$$-t + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 a_{n+1} t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n t^n = 0,$$

$$(4\, a_2 - 1)\, t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} - n\, a_n]\, t^n = 0,$$

et, avec l'unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on a $a_2 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2} a_n$, c'est-à-dire en fait $\boxed{a_n = \frac{n-1}{n^2} a_{n-1} \text{ pour tout } n \geqslant 2}$.
Avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, cela définit une unique suite (a_n) à termes strictement positifs pour $n \geqslant 1$.
Pour tout $t > 0$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} t^{n+1}}{a_n t^n} = 0$, donc la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n t^n$ est de rayon de convergence infini.
Par récurrence on a, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{(n-1)!}{(n!)^2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1}{n \cdot n!}}.$$

On obtient : $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n \cdot n!}$ pour tout t de $\mathbb{R}$, unique solution de (E) somme d'une série entière et telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

b) On obtient alors $\boxed{z'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}}$.

c) Pour tout $t > 0$, on a $t\, z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n\, n!}$.
Avec $n\, n! \underset{n\to\infty}{\sim} (n+1)!$ et ce qui précède on a donc

$$t\, z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^t - 1 - t,$$

et finalement $\boxed{z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^t}{t}}$.

FIN

À la prochaine