Concours ommuns polytechniques- Mathématiques I
Corrigé par M. TAIBI Lycée Moulay Youssef Rabat

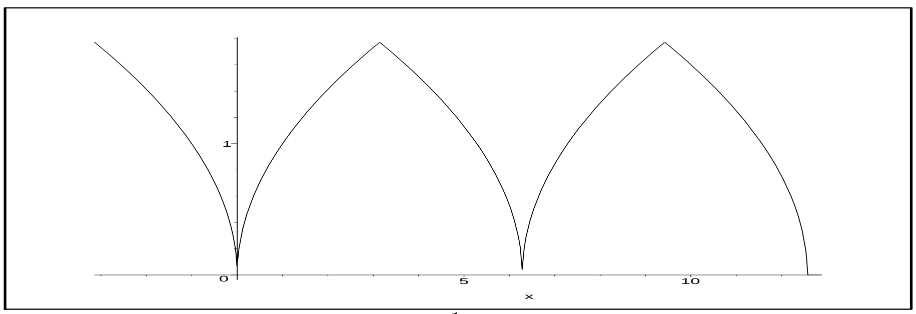
Partie I : Résultats préliminaires

1. Dans le théorème de convergence normale on suppose seulement f continue par morceaux.

   a) C'est le théorème de Dirichlet de convergence simple :
   $\cdot f$ est continue par morceaux et 2π -périodique
   $\cdot f$ est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$
   Alors $(S_p(f))_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

   b) La convergence ne peut-être uniforme sur $\mathbb{R}$.
   Exemple : $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ 1 \text{ si } t \in [0, \pi[\end{cases}$ et f 2π- périodique

2. Représentation graphique de φ :



   φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 par morceaux car $\lim\limits_{x \to 0} \varphi = +\infty$

3. théorème de Cesaro :
   On suppose que la suite complexe (u_n) converge vers ℓ

   a) $\begin{cases} u_n - \ell = o(1) \\ \text{la serie } \sum_{n \geqslant 0} 1 \quad \text{diverge} \end{cases}$ implique $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \ell) = o(\sum\limits_{k=0}^{n} 1) = o(n+1)$ (cours)

   b) Par ce qui précède $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \ell)}{n+1} = o(1)$. Mais $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \ell) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k - (n+1)\ell$, donc $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}{n+1} - \ell \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. On pose $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}(S_0(f) + ... + S_n(f))$,
   On suppose que $(S_n(f))_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Posons alors $g(x) = \lim_n S_n(f)(x)$ pour tout x
   Par le théorème de Fejer, $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
   Par le théorème de Cesaro $(\sigma_n)_n$ converge simplement vers g.
   Donc $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

5. $(u_n)_n$ est une suite de réels telle que $\lim u_n = 0$. notons par $d_n = \sup\{u_k \ / \ k \geqslant n\}$, on a alors : $\forall k \geqslant n$, $0 \leqslant u_k \leqslant d_n$, en particulier $0 \leqslant u_n \leqslant d_n$.
   D'autre part : $\{u_k \ / \ k \geqslant n+1\} \subset \{u_k \ / \ k \geqslant n\}$ et par passage à la borne sup, on a : $d_n \geqslant d_{n+1}$. Donc la suite $(d_n)_n$ est bien décroissante.
   Vérifions que $(d_n)_n$ converge vers 0 pour conclure.

On a déja (d_n) est décroissante et positive, donc converge vers un réel $d \geqslant 0$.
Par définition de d, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ application strictemen croissante telle que : $\forall n,\ d \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant d + \frac{1}{n+1}$. Et comme $u_n \to 0$, il en résulte que $u_{\varphi(n)} \to 0$ et puis $d = 0$ par unicité de la limite.

Partie II : Exemple de série de Fourier divergente en un point.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application telle que : $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left[(2^{n^3} + 1)\frac{x}{2}\right]$

6. Pour tout $x \in [0, \pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (indépendement de x) , donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

7. $I_{p,k} = \int\limits_0^{\pi} \cos(pt)\sin(\frac{2k+1}{2}t)dt$, et $T_{q,k} = \sum\limits_{p=0}^{q} I_{p,k}$

   a) Calcul de $I_{p,k}$
   $$\begin{aligned} I_{p,k} &= \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\left[\sin(p + \tfrac{2k+1}{2})t + \sin(p - \tfrac{2k+1}{2})t\right] dt \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\left[-\tfrac{1}{p+\frac{2k+1}{2}}\cos(p + \tfrac{2k+1}{2})t\right]_0^{\pi} - \left[\tfrac{1}{p-\frac{2k+1}{2}}\cos(p - \tfrac{2k+1}{2})t\right]_0^{\pi}\right) \ (\ p \neq \tfrac{2k+1}{2}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{p-\frac{2k+1}{2}} + \tfrac{1}{p+\frac{2k+1}{2}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2p-2k-1} + \tfrac{1}{2p+2k+1} \end{aligned}$$

   b) $T_{p,k}$ en fonction des u_j :
   $$\begin{aligned} T_{p,k} = \sum_{p=0}^{q} I_{p,k} &= \sum_{p=0}^{q}\left(\tfrac{1}{2p-2k-1} + \tfrac{1}{2p+2k+1}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{q} \tfrac{1}{2(k-p)+1} + \sum_{p=0}^{q} \tfrac{1}{2(k+p)+1} \\ &= \sum_{j=k}^{k-q} \tfrac{1}{2j+1} + \sum_{j=k}^{k+q} \tfrac{1}{2j+1} \\ &= \sum_{j=k-q}^{k+q} \tfrac{1}{2j+1} + \tfrac{1}{2k+1} \end{aligned}$$
   Le réel c_k recherché est donc $c_k = \frac{1}{2k+1}$ qui est positif. Comme la quatité $\sum\limits_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$ est positif car $0 \leqslant |k - q| \leqslant k + q$, ilen résulte que $T_{q,k}$ est aussi positif ou nul .

   c) Quetion classique :
   $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2k} > 0 \\ \sum \frac{1}{2k} \text{ diverge} \end{array}\right.$, donc, par le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :
   $$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \sim \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{2}\ln(N)$$

   d) Equivalent de $T_{k,k}$:
   On a : $T_{k,k} = \frac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \sim \sum\limits_{j=0}^{2k} \frac{1}{2j+1} \sim \frac{1}{2k}\ln(2k) \sim \frac{1}{2}\ln k$ car $\lim \ln(k) = +\infty$ et $\frac{1}{2}\ln(2)$ est constant.

8. f étant paire, 2π-périodiq et contiue sur R, donc pour tout $p \in N^*$, on a : $a_p(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(pt)dt$.
   Mais $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin(2^{n^3} + 1)\frac{t}{2}$ pour tout t$\in [0, \pi]$ et que la convergence

de la série est unifrme sur $[0, \pi]$, donc :

$$\begin{aligned} a_p(f) &= \tfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \cos(pt) \sin(2^{n^3}+1) \tfrac{t}{2} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{\pi . n^2} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(pt) \sin(2^{n^3}+1) \frac{t}{2} dt}_{I_{p,2^{n^3-1}}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{\pi . n^2} I_{p,2^{n^3-1}}, \quad k = 2^{n^3-1} \text{ de sorte que } 2k = 2^{n^3} \end{aligned}$$

9. Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2^{p^3-1}}(f)(0) &= \tfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{2^{p^3-1}} a_k(f) \cos(k.0) = \tfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{2^{p^3-1}} a_k(f) \\ &= -\tfrac{a_0}{2}(f) + \sum_{k=0}^{2^{p^3-1}} a_k(f) \\ &= -\tfrac{a_0}{2}(f) + \sum_{k=0}^{2^{p^3-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{\pi . n^2} I_{k,2^{n^3-1}} \\ &= -\tfrac{a_0}{2}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{\pi . n^2} \sum_{k=0}^{2^{p^3-1}} I_{k,2^{n^3-1}} \\ & -\tfrac{a_0}{2}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{\pi . n^2} T_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}} \\ &\geqslant \underbrace{-\frac{a_0}{2}(f) + \frac{2}{\pi . p^2} T_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}}}_{=w_p} \end{aligned}$$

On sait que $T_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}} \sim \frac{1}{2} \ln(2^{p^3-1}) = \frac{1}{2}(p^3-1)\ln(2) \sim \frac{1}{2} p^3 \ln(2)$, donc $w_p \sim \frac{p}{\pi} \ln(2) \underset{p \to +\infty}{\to} +\infty$ et par suite $\sum_{p \geqslant 1} S_{2^{p^3-1}}(f)(0)$ diverge.

Partie III : Fonctions à variations bonées, théorème de Jordan

Pour $a < b$ deux réels, on pose $S[a,,b]$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

10. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x \cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$

Montrons que f est continue sur $[0, 1]$.

La fonction f est continue sur $]0, 1]$ par opérations. L'application $x \mapsto \cos(\frac{\pi}{2x})$ est bornée sur $]0, 1]$, donc $\lim_{x \to 0^+} x. \cos(\frac{\pi}{2x}) = 0 = f(0)$ et suite f est contninue en 0. En conclusion f est continue sur $[0; 1]$.

Montrons que f n'est pas à variation bornée sur $[0; 1]$.

Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1} \in S_{[0;1]}$ telle que : $\begin{cases} x_0 = 0, & x_{n+1} = 1 \\ \forall k \in [\![1, n]\!], & x_k = \frac{1}{2(n+1-k)} \end{cases}$

Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \frac{1}{2(n-k)} \cos(\frac{p}{2\frac{1}{2}(n-k)}) - \frac{1}{2(n+1-k)} \cos(\frac{\pi}{2\frac{1}{2(n+1-k)}}) = \cos((n-k)\pi) - \cos((n+1-k)\pi) = (-1)^{n-k} \left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)}\right)$, donc $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)}\right)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$et par suite $V(\sigma, f) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)}\right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) \underset{n \to \infty}{\to} +\infty$, donc f n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$.

11. Exemples généraux :

   a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application monotone.
   Lemme : f est variation bornée ssi $-f$ est à variation bornée
   Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, f est à variation bonée ssi λf est à variation bornée.
   La preuve du lemme est évidente.
   Quitte a changer f en $-f$, supposons f est croissante sur $[a,b]$ et soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in S_{[a,b]}$, alors : $f(x_{k+1}) \geqslant f(x_k)$ pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$
   et $V(\sigma, f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$ pour tout $\sigma \in S_{[a,b]}$.
   D'où f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V([a,b], f) = f(b) - f(a)$.
   En conclusion :
   si f est monotone sur $[a,b]$, alors f est à variation bornée et $V([a,b], f) = |f(b) - f(a)|$

   b) Supposons $f = g + h$ avec g et h monotones sur $[a,b]$ et soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in S_{[a,b]}$, alors :
   $V(\sigma, f) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |h(x_{k+1}) - h(x_k)| = |g(b) - g(a)| + |h(b) - h(a)|$.
   Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V([a,b], f) \leqslant V([a,b], g) + V([a,b], h)$..

   c) $f : [a,b] \to C$ continue et C^1 par morceaux sur $[a,b]$.
   Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in S_{[a,b]}$, alors $V(\sigma, f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant M(b-a)$ grâce à l'inégalité des accroissement finis appliquée a f sur $[x_k, x_{k+1}]$ avec $M = \max(\sup\limits_{x \in [a,b]} |f'_d(x)|, \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'_g(x)|)$ où $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ désignent resp. les dérivées à droite et à gauche e f au point x.

12. $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une application à variation bornée, $c \in]a,b[$
   Soient $\sigma_1 \in S_{[a,c]}$, $\sigma_2 \in S_{[c,b]}$ et $\sigma = \sigma_1 \vee \sigma_2$ subdivision de $[a,b]$ obtenue par juxtaposition des deux subdivisions, alors $V(\sigma_1, f) \leqslant V(\sigma, f) \leqslant V([a,b], f)$ et $V(\sigma_2, f) \leqslant V(\sigma, f) \leqslant V([a,b], f)$, donc $f_{/[a,c]}$ et $f_{/[c,b]}$ sont à variations bornées .
   On a aussi : $V([a,b], f) \geqslant V(\sigma, f) = V(\sigma_1, f) + V(\sigma_2, f)$ pour tous σ_1 et σ_2. On passe à la borne sup. sur les $\sigma_1 \in S_{[a,c]}$ pour avoir :$V([a,b], f) \geqslant V([a,c], f) + V(\sigma_2, f)$ et puis à la borne sup. sur les σ_2 pour obtenir :
   $$V([a,b], f) \geqslant V([a,c], f) + V([c,b], f)$$

13. Soit $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant |n|N} \in S_{[0,2\pi]}$ telle que $x_k = \frac{2k\pi}{|n|N}$.
   Pour $k \in \{1, ..., |n|\, N\}$, $\quad V_k(f) = V([x_{k-1}, x_k],\, f)$.

   a) Pour $t \in [x_{k-1}, x_k]$, on utilisera la subdivision $x_{k-1} \leqslant t \leqslant x_k$ de $[x_{k-1}, x_k]$:
   $\left| \sum\limits_{k=1}^{|n|N} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{|n|N} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |(f(t) - f(x_k))|\, dt \leqslant \sum\limits_{k=1}^{|n|N} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} V_k(f) dt = \sum\limits_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1})$, donc :
   $$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k)) e^{-int} dt \right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1})$$

   b) $\left| \sum\limits_{k=1}^{|n|N} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| = \left| \sum\limits_{k=1}^{|n|N} f(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-int} dt \right|$. Or $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-int} dt = -\frac{1}{in} \left(e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}} \right)$,
   donc : $\left| \sum\limits_{k=1}^{|n|N} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| = \frac{1}{|n|} \left| \sum\limits_{k=1}^{|n|N} f(x_k) \left(e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}} \right) \right|$, Mais

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right) &= \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_k} - \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_{k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_k} - \sum_{k=0}^{|n|N-1} f(x_{k+1})e^{-inx_k} \\ &= \sum_{k=0}^{|n|N-1} \left(f(x_k)-f(x_{k+1})\right)e^{-inx_k} + \underbrace{f(2\pi)e^{-i2n\pi}-f(0)e^{-inx_0}}_{=0} \\ &= \sum_{k=0}^{|n|N-1} \left(f(x_k)-f(x_{k+1})\right)e^{-inx_k}\end{aligned}$$

,

donc $\left|\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{|n|N-1} |f(x_k)-f(x_{k+1})| = V([0,2\pi],f)$ et par suite :

$$\left|\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt\right| \leqslant \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)$$

c) Par la question a) et l'inégalité triangulaire , on a :
$\left|\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int}dt\right| - \left|\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k))e^{-int}dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1})$, donc :

$$\begin{aligned}2\pi\,|c_n(f)| &= \left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int}dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \left|\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k))e^{-int}dt\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \tfrac{1}{|n|}V([0,2\pi],f).\end{aligned}$$

Or : $\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) \leqslant \frac{2\pi}{|n|N}\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) \leqslant \frac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f)$ (voir question 12)
D'où : $2\pi\,|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f) + \frac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f) = \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)\left(1+\frac{2\pi}{N}\right)$
et que $\frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)\left(1+\frac{2\pi}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)$ et par suite

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi\,|n|}V([0,2\pi],f) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{Z}^*$$

14. On pose $S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j$ et $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$ et suppose que $\sigma_n \to L$ et $\exists A>0$ tel que $|u_k| \leqslant \frac{A}{k+1}$ pour tout k

a) Pour k et n des entiers naturels non nuls, on a :

$$\begin{aligned}k(S_n-L)-(n+k)(\sigma_{n+k-1}-L)+n(\sigma_{n-1}-L) &= kS_n-(n+k)\sigma_{n+k-1}+n\sigma_{n-1} \\ &= kS_n - \sum_{j=0}^{n+k-1} S_j + \sum_{j=0}^{n-1} S_j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}(S_n-S_{j+n}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} u_l\end{aligned}$$

b) Avec la relation précèdente et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} k\left|S_n-L\right| & \leqslant \left|\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} u_l\right| + \left|(n+k)(\sigma_{n+k-1}-L)\right| + \left|n(\sigma_{n-1}-L)\right| \\ & \leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} \tfrac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} \text{ car } (d_n) \text{ est décroissante} \\ & \leqslant \sum_{j=0}^{k-1} j\tfrac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} = \tfrac{k(k-1)}{2}\tfrac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} \end{aligned}$$

D'où

$$|S_n - L| \leqslant \frac{(k-1)}{2}\frac{A}{n+2} + (1+\frac{2n}{k})d_{n-1}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(k-1)^2 \leqslant 4n^2 d_{n-1} \leqslant k^2$, alors :

$$\begin{aligned} |S_n - L| & \leqslant (1+\tfrac{2n}{k})d_{n-1} + \tfrac{(k-1)}{2}\tfrac{A}{n+2} \\ & \leqslant d_{n-1} + \tfrac{2n}{k}d_{n-1} + \tfrac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}A \\ & \leqslant d_{n-1} + \tfrac{2n}{2n}\sqrt{d_{n-1}} + \tfrac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}A \\ & \leqslant d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}} \text{ car } \tfrac{2n}{2(n+2)} < 1 \end{aligned}$$

Comme (d_n) et décroissante et tend vers 0, la suite $(S_n)_n$ converge vers L.

15. Par le théorème de Fejer $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ .Soit $(d_n)_n$ une suite de reéls positifs telle que (d_n) est décroissante et tend vers 0 (appliquer le résultat de la question 5) à al suite $\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\sigma_n(t) - f(t)|\right)_n$) et que $|\sigma_n(t) - f(t)| \leqslant d_n$ pour tout t.

    Posons $\begin{cases} u_0(t) = c_0(f) \\ u_n(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ de sorte que $S_n(f)(t) = \sum_{j=0}^{n} u_j(t)$.

    On a alors :

    $|u_n(t)| \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| \leqslant \frac{V([0,2\pi],f)}{n\pi} = \frac{n+1}{n}\frac{V([0,2\pi],f)}{(n+1)\pi} \leqslant 2\frac{V([0,2\pi],f)}{(n+1)\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (voir question 13.c)). et que $|u_0(t)| = |c_0(f)|$

    Donc : $|u_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1}A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \max(|c_0(f)|, 2\frac{V([0,2\pi],f)}{\pi})$.

    Par la question 14) , pour tout réel t on a : $|S_n(f)(t) - f(t)| \leqslant d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$ et par suite $(S_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

16. φ étant continue et 2π-périodique. En écrivant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où $\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ \sqrt{t} \text{ si } t \in [0,\pi] \end{cases}$ et $\varphi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{-t} \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ 0 \text{ si } t \in [0,\pi] \end{cases}$, on a laors φ est à variation bornée sur $[-\pi,\pi]$ car φ est somme de deux fonctions monotones.

    Par la question 15), la série de Fourier de φ converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$.

17. **Application :**

    $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ application 2π-périodique et α-lipschitzienne, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

    De plus si $\sigma = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in S_{[-\pi,\pi]}$, alors $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \alpha |x_{k+1} - x_k| = \alpha (x_{k+1} - x_k)$ et par suite : $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \alpha 2\pi$. Donc f est à variation bornée et d'après ce qui précède : (question 15) la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.