CPGE My Youssef, Rabat

DL 10 (09-10): *Séries dans un Banach*

29 janvier 2010

Blague du jour :
Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
1- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accrocs ils augmenteront les prix.
2 Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
3 L'utilisation de drogue et d'Internet Explorer ont dramatiquement augment dernièrement.
4 Les deux vous explosent le système de temps en temps.
5 Billy, comme les dealers, voudrait bien que tu revendes ses produits aux autres.

Mathématicien du jour **D'Alembert**
Jean le Rond D'Alembert(1717-1783), est un mathématicien et philosophe français. Il fût abandonné par sa mère, le deuxième jour de sa naissance, devant la porte de la chapelle *Saint-Jean-le-Rond*.
Il obtint le baccalauréat en arts, puis suivit les cours de l'école de Droit. Refusant de s'inscrire au barreau, il entreprit des études de médecine. Il commence ses premiers travaux scientifiques en astronomie. Ami de Voltaire, il était un habitué des salons parisiens. D'Alembert est considéré comme un théoricien de la musique. Ses études de la vibration des cordes font de lui l'un des fondateurs de la physique mathématiques.
Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'à 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivés partielles.

Problème I Concours École de l'air 1997.

On se propose de calculer la somme de la série suivante :
$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$
On examinera différentes méthodes en essayant de préciser à chaque fois l'erreur commise.

1°) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots$

Démontrer que :
$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2n^2} \qquad (1)$$
(On pourra penser à comparer la série à une intégrale).
En déduire le nombre de termes permettant d'obtenir la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

2°) On veut améliorer la méthode précédente.

On pose $\bar{S}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

Démontrer que :

$$\left|S - \bar{S}_n\right| \leqslant \frac{1}{2n^3}.$$

(On utilisera (1)).

En déduire le nombre de termes permettant d'obtenir la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

3°) On introduit la série $\Delta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

a) Calculer la somme de cette série.

b) On pose $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)$.

Démontrer que :

$$\frac{1}{(n+3)^3} \leqslant R'_n \leqslant \frac{1}{n^3}.$$

En déduire le nombre de termes permettant d'obtenir la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

c) Posons $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$ et $S''_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+3)^3}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)$.

Démontrer que :

$$|S' - S''_n| \leqslant \frac{9}{2n^4}.$$

En déduire le nombre de termes permettant d'obtenir la somme S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

4°) Soit $U_n = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n^3} + \frac{c}{n^4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ $(n \geqslant 1)$.

On pose $u_n = U_n - U_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$.

a) On demande de déterminer les réels a, b, c pour que u_n soit un infiniment petit d'ordre maximal en $\frac{1}{n}$.

b) Démontrer alors que :

$$U_n - \frac{1}{8(n-1)^6} \leqslant S \leqslant U_n.$$

(On montrera d'abord que $-\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{8(n-1)^6}$).

c) En déduire la valeur de S avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

Problème II Concours EPITA 2009.

Dans toute la suite du problème, on considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^4)^n}.$$

1°) *Etude de la suite* (u_n)

a) Justifier l'existence de l'intégrale u_n pour tout entier $n \geq 1$.

b) Quel est le sens de variation de la suite (u_n)?

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) en précisant avec soin le théorème utilisé.

2°) *Etude de la série* $\sum \frac{u_n}{n}$

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifier la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4\,n-3}{4\,n}\,u_n.$$

b) En formant $u_n - u_{n+1}$, déterminer la nature et la somme de la série $\sum \frac{u_n}{n}$.

On donne à cet effet la valeur $u_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3°) *Etude des séries* $\sum u_n$ *et* $\sum (-1)^n\, u_n$

a) Justifier l'existence de l'intégrale suivante, notée $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{4}}\, e^{-u}\, du.$$

b) Déterminer, pour $u \geq 0$, la limite de la suite $n \longrightarrow \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Justifier, pour $u \geq 0$, l'inégalité $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \geq 1 + u$.

d) Effectuer le changement de variables $t = \left(\frac{u}{n}\right)^{\frac{1}{4}}$ dans l'intégrale u_n.

Déduire des résultats précédents un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

e) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? de la série $\sum (-1)^n\, u_n$?

4°) *Etude de la série entière* $\sum u_n\, x^n$

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 1} u_n\, x^n$.

On note désormais S la somme de cette série entière sur l'intervalle $]-R, R[$.

b) Calculer l'expression $4\,x\,(1-x)\,S'(x) + (3\,x-4)\,S(x)$.

c) Résoudre l'équation $4\,x\,(1-x)\,y' + (3\,x-4)\,y = 0$ sur $]0, 1[$ et $]-1, 0[$.

d) Ces solutions se prolongent-elles en solutions de classe C^1 sur $]-1, 1[$?

e) En déduire l'expression de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\, x^n$ pour $|x| < R$.

Fin
À la prochaine