

Pr. Verschueren, Lycée Daudet à Nîmes

Partie I Une étude de séries.

**Question I. 1. 1.** Pour  $k \geq 1$ , considérons la série entière de terme général  $u_k(x) = (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ .

Pour  $x > 0$ , on a  $\left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \left| \frac{kx}{k+1} \right| \rightarrow x$  quand  $k \rightarrow \infty$ , donc avec le critère de d'Alembert, si  $x > 1$ , on a divergence absolue de  $\sum u_k(x)$  et si  $x < 1$ , on a convergence absolue de cette même série.

Ainsi  $R = 1$ , et la somme totale de la série entière est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$ .

En  $x = 1$ , la série  $\sum u_k(1)$  est une série de Riemann alternée vérifiant le thm spécifique (car  $|u_k(1)| \rightarrow 0$  en décroissant) donc convergente. En  $x = -1$ , la série  $\sum u_k(-1)$  est la série harmonique  $\sum \frac{1}{k}$  divergente.

$L$  est définie sur  $] -1, 1[$ . On reconnaît le D.S.E. de  $\ln(1+x)$ , et  $L(x) = \ln(1+x)$  sur  $] -1, 1[$ .

**Question I. 1. 2.** Pour  $x \in [0, 1]$ , la série numérique  $\sum u_k(x)$  est une série alternée, car  $|u_k(x)| = \frac{x^k}{k}$ . Cette série alternée vérifie les hypothèses du thm spécifique car  $|u_k(x)| \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ , et en décroissant avec  $\left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \left| \frac{kx}{k+1} \right| < 1$ . On retrouve ainsi la convergence de

la série  $\sum u_k(x)$ , sur  $[0, 1]$ , que l'on a déjà assurée, et le résultat complémentaire que le reste est majoré :  $|L(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$

Ainsi, pour  $n \geq 1$ , en notant  $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ , on a :

$$\forall x \in [0, 1], |L(x) - S_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Cette fonction est bornée, et  $N_\infty^{[0,1]}(L - S_n) \leq \frac{1}{n+1}$  Quand

$n \rightarrow \infty$ , on a donc que  $N_\infty^{[0,1]}(L - S_n) \rightarrow 0$ , et on a assuré la convergence uniforme de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $[0, 1]$  vers  $L$ . Les  $S_n$ , qui sont des polynômes (sommes partielles d'une série entière) sont continus, et par le thm de continuité sous convergence uniforme,

$L$  est continue sur  $[0, 1]$  Alors  $L(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x)$  donc  $L(1) = \ln(2)$

**Question I. 2. 1.** Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^{k=3p} a_k = \sum_{q=1}^{q=p} a_{3q} + \sum_{q=0}^{q=p-1} a_{3q+1} +$

$\sum_{q=0}^{q=p-1} a_{3q+2}$  en distinguant les entiers  $k$  modulo 3.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{k=1}^{k=3p} a_k &= -\frac{2}{3} \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q} + \sum_{q=0}^{q=p-1} \frac{1}{3q+1} + \sum_{q=0}^{q=p-1} \frac{1}{3q+2} = -\sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q} + \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{3q} + \\ &= -\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{k=3p} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

en retrouvant, cette fois, tous les entiers  $k$  m

Et  $\sum_{k=1}^{k=3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{k=3p} \frac{1}{k} = \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{p+h} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}}$  par changement d'indice  $k = p + h$ , et factorisation de  $\frac{1}{p}$ .

**Question I. 2. 2.** Une somme de Riemann de la fonction  $f$  sur le segment  $[a, b]$ , qu'on partage en subdivision

équidistante, est  $SR_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{h=1}^{h=n} f\left(a + h \frac{b-a}{n}\right)$ , et on sait que pour  $f$  continue sur  $[a, b]$ , la suite  $(SR_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\int_a^b f(t) dt$ . Il en est de même de la suite extraite  $(SR_{2p}(f))_{p \in \mathbb{N}^*}$ .

Pour  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$  le segment  $[a, b] = [0, 2]$  et  $n = 2p$ , on a donc que  $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{p}$  et  $a + h \frac{b-a}{n} = 1 + \frac{h}{p}$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}} = \int_a^b f(t) dt = \int_0^2 \frac{dt}{1+t} = \ln(3)$$

Notons  $A_n$  la somme partielle de  $\sum_{k=1}^{k=n} a_k$ .

On vient de montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{3p} = \ln(3)$

Les deux suites de termes généraux  $A_{3p+1} = A_{3p} + \frac{1}{3p+1}$  et

$A_{3p+2} = A_{3p} + \frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2}$  ont même

limite, et les 3 suites extraites  $(A_{3p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(A_{3p+1})_{p \in \mathbb{N}^*}$  et  $(A_{3p+2})_{p \in \mathbb{N}^*}$  tendent vers la même limite  $\ln(3)$ .

Ce qui assure que la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, et que

la série  $\sum a_n$  converge vers sa somme totale  $\ln(3)$

**Question I. 2. 3.** Le réel  $\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$  vaut selon la classe de  $k$  modulo 3 :

$$\text{ulo } 3 : \begin{cases} \text{si } k = 3p : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = 1 \\ \text{si } k = 3p + 1 : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \text{si } k = 3p + 2 : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} a_k$ , série qui converge et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \ln(3) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

**Question I. 3. 1.** Pour  $t \in ]0, 2\pi[$ , on a  $e^{it} \neq 1$  et  $S_n(t)$  qui apparaît comme la somme des termes successifs de la

suite géométrique de raison  $e^{it}$ , vaut donc  $S_n(t) = \sum_{k=1}^n (e^{it})^k = \frac{e^{it} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}}$

**Question I. 3. 2.** Sur  $]0, 2\pi[$  le dénominateur de  $\varphi$  est non nul et de classe  $C^\infty$ , avec  $e^{it} - 1 = \cos(t) - 1 + i \sin(t)$ .

La fonction  $\varphi$  est donc  $C^1$  sur  $]0, 2\pi[$  et sur le segment  $[\pi, \alpha]$ .

D'ailleurs  $\varphi(t) = \frac{\cos(t) - 1 - i \sin(t)}{(\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t)} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sin(t)}{2(1 - \cos(t))}$  en séparant parties réelle et imaginaire.

**Note :** L'hypothèse  $\alpha \in [\pi, 2\pi[$  ne sert que pour l'écriture sans ambiguïté des segments  $[\pi, \alpha]$ , qu'on devrait

écrire, à strictement parler,  $[\alpha, \pi]$  si  $0 < \alpha < \pi$ , dans les questions suivantes.

**Question I. 3. 3.** Puisque  $\varphi$  est  $C^1$  sur le segment  $[\pi, \alpha]$ , ainsi que la fonction  $t \mapsto e^{(n+1)it}$ , on peut effectuer une

intégration par partie : 
$$\int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt = \left[ \frac{e^{(n+1)it} \varphi(t)}{(n+1)i} \right]_{t=\pi}^{t=\alpha} - \int_{\pi}^{\alpha} \frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \varphi'(t) dt$$

$\varphi$  et  $\varphi'$  sont continues sur le segment  $[\pi, \alpha]$  donc bornées, respectivement par  $M_{\varphi} = \sup_{[\pi, \alpha]} |\varphi(t)|$  et  $M_{\varphi'} = \sup_{[\pi, \alpha]} |\varphi'(t)|$

et ainsi : 
$$\left| \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt \right| \leq \left| \left[ \frac{e^{(n+1)it} \varphi(t)}{(n+1)i} \right]_{t=\pi}^{t=\alpha} \right| + \left| \int_{\pi}^{\alpha} \frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \varphi'(t) dt \right| \leq \frac{2M_{\varphi}}{n+1} + \frac{|\alpha - \pi| M_{\varphi'}}{n+1}$$

Le numérateur est une constante réelle, donc 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt = 0$$

**Question I. 3. 4.** Pour  $\alpha \in ]0, 2\pi[$ , 
$$\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \left( \int_{\pi}^{\alpha} e^{kit} dt \right) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{e^{kit}}{ki} \right]_{\pi}^{\alpha} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha} - e^{ki\pi}}{k}$$

et  $e^{ki\pi} = (e^{i\pi})^k = (-1)^k$  donc 
$$\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt =$$

$$-i \left[ \sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha}}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right]$$

Mais aussi avec **I. 3. 1.** on a 
$$\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt = \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt - \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

Ainsi : 
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha}}{k} = -\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + i \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt - i \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

On a assuré l'existence des limites des termes de droite quand  $n \rightarrow \infty$ , on assure donc la convergence de la série

et la valeur de sa somme totale : 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ki\alpha}}{k} = -\ln(2) - i \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

**Question I. 3. 5.** Pour tout  $t \in ]0, 2\pi[$ , on a  $e^{it} \neq 1$  et  $e^{it} \varphi(t) = \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{-i\frac{t}{2}} e^{it}}{e^{-i\frac{t}{2}} (e^{it} - 1)} = \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{2i \sin(\frac{t}{2})}$

**Question I. 3. 6.** Ainsi  $e^{it} \varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2i \sin(\frac{t}{2})}$  et

$$\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} (\alpha - \pi) - i \left[ \ln \left( \sin \left( \frac{t}{2} \right) \right) \right]_{t=\pi}^{t=\alpha}$$

$$\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} (\alpha - \pi) - i \ln \left( \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$
. En séparant parties réelle et imaginaire, on a montré la convergence des deux séries et calculé leurs sommes totales :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln(2) - \ln \left( \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

ce qui est vrai pour  $\alpha \in ]0, 2\pi[$ ,  
en échangeant les bornes des intégrales.

En particulier pour  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ , on a  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} =$

$$-\ln(2) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\ln(\sqrt{3})$$

on retrouve ainsi le résultat de I. 2. 3. **Note** : pour  $\alpha = \pi$ , on  
retrouve  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$ .

## Partie II Limite d'une intégrale.

**Question II. 1.** Si  $g$  est bornée par  $M_g = \sup_{[0, \infty[} |g(t)|$ , alors pour  
 $x > 0$ , on a  $|f(t)g(xt)| \leq M_g |f(t)|$  si  $t \in [0, \infty[$ .

Puisque l'intégrale  $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$  converge, alors  $\int_0^{\infty} |f(t)g(xt)| dt$

converge et  $\tilde{f}_g(x)$  existe pour tout  $x > 0$

De plus la fonction  $\varphi_0 : t \mapsto M_g |f(t)|$  est positive, continue par  
morceaux et intégrable sur  $[0, \infty[$ , elle domine  
la fonction à deux variables :  $F_g : (x, t) \mapsto f(t)g(xt)$ , qui est  
continue par rapport à  $x$  à  $t$  fixé et continue par  
morceaux par rapport à  $t$ , à  $x$  fixé. On a ainsi les hypothèses du  
thm de continuité des intégrales à paramètres

sous domination :  $\tilde{f}_g$  est continue sur  $]0, \infty[$ . Enfin :  $\forall x >$

$$0, \left| \tilde{f}_g(x) \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)g(xt)| dt \leq M_g \int_0^{\infty} |f(t)| dt$$

donc  $\tilde{f}_g$  est bornée sur  $]0, \infty[$

**Question II. 2. 1.** Si  $g$  est la fonction  $t \mapsto e^{it}$ , on a les hypothèses,  
de la question précédente, avec  $M_g = 1$ .

Par définition de la convergence d'une intégrale :  $\int_0^{\infty} |f(t)| dt =$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A |f(t)| dt \text{ donc } \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{\infty} |f(t)| dt = 0$$

et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A > 0$ , tel que  $0 \leq \int_A^{\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$

**Question II. 2. 2.** Pour  $A$  ainsi fixé, on peut effectuer une intégration  
par partie, puisque les fonctions sont  $C^1$  sur

$$\text{le segment } [0, A] : \int_0^A e^{ixt} f(t) dt = \left[ \frac{e^{ixt}}{ix} f(t) \right]_{t=0}^{t=A} -$$

$$\int_0^A \frac{e^{ixt}}{ix} f'(t) dt$$

$$\text{Ainsi } \left| \int_0^A e^{ixt} f(t) dt \right| \leq \frac{|f(A)| + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x} \int_0^A |f'(t)| dt \text{ et}$$

puisque  $A$  est fixé, le majorant est de la forme  $\frac{K}{x}$

$$\text{où } K \text{ est constante. Donc } \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ixt} f(t) dt = 0$$

**Question II. 2. 3.** Assurons que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \tilde{f}_g(x) \right| = 0$ , en montrant  
que  $\left| \tilde{f}_g(x) \right|$  peut être majoré par n'importe quel  
 $2\varepsilon > 0$ , pour  $x$  suffisamment grand. Considérons donc  $\varepsilon > 0$ , quel-  
conque mais fixé.

• Pour ce  $\varepsilon > 0$ , avec II. 2. 1. il existe  $A > 0$ , tel que

$$\forall x > 0, \left| \int_A^\infty e^{ixt} f(t) dt \right| \leq \int_A^\infty |f(t)| dt \leq \varepsilon$$

• Pour un  $A$  ainsi choisi, il existe  $x_0 > 0$ , tel que  $\forall x \in ]0, \infty[$ ,  $(x \geq x_0) \implies \left( \left| \int_0^A e^{ixt} f(t) dt \right| < \varepsilon \right)$

Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x_0 > 0$ , tel que  $\forall x \in ]0, \infty[$ ,  $(x \geq x_0) \implies \left( \left| \int_0^\infty e^{ixt} f(t) dt \right| < 2\varepsilon \right)$ .

On a donc montré que  $\lim_{x \rightarrow \infty} |\tilde{f}_g(x)| = 0$

**Question II. 3. 1.** Si  $g$  est la fonction  $t \mapsto |\sin(t)|$ , on a les hypothèses de II. 1., avec  $M_g = 1$ .

Pour  $f = E$ , la fonction  $E$  est  $C^1$  sur  $[0, \infty[$ , à valeurs réelles et  $\int_0^\infty |E(t)| dt$  existe et vaut 1.

La conclusion de II. 2. 3. est assurée. On peut calculer  $\theta(\gamma)$  de deux façons différentes :

• En calculant  $\int_0^\pi e^{\gamma y} e^{iy} dy = \left[ \frac{e^{(\gamma+i)y}}{\gamma+i} \right]_{y=0}^{y=\pi}$  car  $\gamma - i \neq 0$ .

D'où  $\int_0^\pi e^{\gamma y} e^{iy} dy = \frac{1}{\gamma+i} [e^{(\gamma+i)\pi} - 1] = \frac{i-\gamma}{\gamma^2+1} [e^{\gamma\pi} + 1]$  et

$$\text{donc } \int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = \frac{e^{\gamma\pi} + 1}{\gamma^2 + 1}$$

• En effectuant deux intégrations par partie successives, les fonctions étant  $C^1$  sur le segment  $[0, \pi]$  :

$$\int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = [e^{\gamma y} (-\cos(y))]_{y=0}^{y=\pi} + \gamma \int_0^\pi e^{\gamma y} \cos(y) dy =$$

$$e^{\gamma\pi} + 1 + \gamma \left[ [e^{\gamma y} (\sin(y))]_{y=0}^{y=\pi} - \int_0^\pi \gamma e^{\gamma y} \sin(y) dy \right]$$

d'où  $\int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = e^{\gamma\pi} + 1 - \gamma^2 \int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy$  et le même résultat.

**Question II. 3. 2.** On a  $\tilde{E}(x) = \int_0^\infty e^{-t} |\sin(xt)| dt$ , intégrale convergente (II. 1.) dans laquelle on peut effectuer

le changement de variable  $\left( \begin{matrix} u = xt \\ t \in ]0, \infty[ \end{matrix} \right) \iff \left( \begin{matrix} t = \frac{1}{x} u \\ u \in ]0, \infty[ \end{matrix} \right)$  qui

est  $C^1$ -difféomorphe entre ces intervalles, donc conserve la convergence des intégrales et leur valeur.

$$\text{Ainsi } \tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du \text{ pour tout } x > 0$$

**Question II. 3. 3.** Avec le changement de variable (translation)  $v = u - k\pi$ , pour tout  $x > 0$ ,

$$\text{on a } \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du = \int_0^\pi e^{-\frac{v+k\pi}{x}} |\sin(v)| dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \int_0^\pi e^{-\frac{v}{x}} \sin(v) dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \theta\left(-\frac{1}{x}\right)$$

**Question II. 3. 4.** On note  $u_k = e^{-\frac{k\pi}{x}} = \left(e^{-\frac{\pi}{x}}\right)^k$ , alors  $\sum u_k$  est

une série géométrique de raison  $e^{-\frac{\pi}{x}} \in ]0, 1[$  donc absolument convergente, et sa somme totale est

$$\sum_{k=0}^\infty e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}} \text{ pour tout } x > 0.$$

**Question II. 3. 5.** Avec la règle de Chasles, on peut décomposer l'intégrale sur  $[0, (n+1)\pi]$  en somme totale d'une série d'intégrales sur les segments  $[k\pi, (k+1)\pi]$ , ainsi, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$\int_0^{(n+1)\pi} e^{-t} |\sin(xt)| dt = \sum_{k=0}^{k=n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} |\sin(xt)| dt = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{k=n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du = \frac{1}{x} \theta \left( -\frac{1}{x} \right) \sum_{k=0}^{k=n} e^{-\frac{k\pi}{x}}$$

Quand  $n \rightarrow \infty$  :  $\tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \theta \left( -\frac{1}{x} \right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}}$  sur  $]0, \infty[$  ou

$$\tilde{E}(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \left( \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{x}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}} \right) \text{ sur } ]0, \infty[$$

Quand  $x \rightarrow \infty$ ,  $e^{-\frac{\pi}{x}} = 1 - \frac{\pi}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et  $\tilde{E}(x) =$

$$\left( \frac{x}{x^2 + 1} \right) \left( \frac{2 + O\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\pi}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)} \right) \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}$$

**Question II. 4. 1. a.** Notons  $h_k$  la fonction  $t \mapsto \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$ . Pour  $k \geq 1$ , la fonction  $h_k$  est paire,  $\pi$ -périodique,

de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et bornée :  $N_\infty(h_k) = \sup_{\mathbb{R}} |h_k(t)| = \frac{1}{4k^2 - 1}$ .

La série  $\sum \frac{1}{4k^2 - 1}$  est convergente par équivalence à une série de

Riemann  $\sum \frac{1}{4k^2}$  d'exposant  $2 > 1$ , donc la série des fonctions  $\sum h_k$  est **normalement convergente** sur  $\mathbb{R}$ , donc uniformément convergente :

par continuité de chaque  $h_k$ , la somme totale  $h$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$

**Question II. 4. 1. b.** La fonction  $g : t \mapsto |\sin(t)|$  est continue, de classe  $C^1$  par morceaux, paire et  $\pi$ -périodique. On peut déterminer son développement en série de Fourier et appliquer le thm complémentaire au thm de Dirichlet, qui assure la convergence normale de la série de Fourier de  $g$  vers  $g$ , sur  $\mathbb{R}$ .

Calculons les coefficients de Fourier de  $g$ . On a la période  $T = \pi$ , la pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$  et :

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n(g) = 0$ , par parité.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n(g) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\sin(t)| \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(2nt) dt$ , par parité.

$$\text{D'où } a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)] dt = \frac{2}{\pi} \left[ \left[ \frac{-\cos((2n+1)t)}{2n+1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \left[ \frac{-\cos((2n-1)t)}{2n-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \right]$$

Ainsi  $a_n(g) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{4n^2 - 1} \right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Dans l'introduction, nous avons assuré les hypothèses du thm de Dirichlet qui assure que la série de Fourier de  $g$

$$\text{converge sur } \mathbb{R}, \text{ de somme totale } S(t) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \cos(n\omega t) + b_n(g) \sin(n\omega t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{4n^2 - 1}$$

qui égale  $g(t)$  sur  $\mathbb{R}$ , donc que  $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t)$

**Question II. 4. 2.** Si de plus  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, \infty[$ , on a pour tout  $x > 0$  :

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\infty} f(t) |\sin(xt)| dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(xt) \right] dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kxt)}{4k^2 - 1} \right] dt$$

où l'on voit apparaître l'intégrale d'une série des fonctions  $\sum f h_k$ .

Chacune de ces fonctions est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}$ , la série converge simplement (et même normalement) sur  $\mathbb{R}$  vers  $t \mapsto f(t) h(xt)$  qui est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Chacune des fonctions est intégrable, car  $|f(t) h_k(t)| = \frac{|\cos(2kxt)|}{4k^2 - 1} |f(t)| \leq |f(t)|$  intégrable sur  $[0, \infty[$  et la

$$\text{série des intégrales } \int_0^{\infty} |f(t) h_k(t)| dt \leq \frac{1}{4k^2 - 1} \int_0^{\infty} |f(t)| dt$$

converge par comparaison à la série  $\sum \frac{K}{k^2}$ .

Les divers hypothèses du thm d'intégration terme à terme sont assurées, et on a donc, chaque intégrabilité étant

assurée, que

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) dt - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt$$

Considérons la série de fonctions  $v_k : x \mapsto \frac{1}{4k^2 - 1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt$  définies et continues sur  $]0, \infty[$ .

Avec II. 2. 3. on sait que  $\lim_{x \rightarrow \infty} v_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt = 0$ , et  $N_{\infty}(v_k) \leq \frac{1}{4k^2 - 1} \int_0^{\infty} |f(t)| dt$

qui est le terme général d'une série convergente, donc la série des fonctions  $\sum v_k$  converge normalement sur  $]0, \infty[$ , donc uniformément. On peut donc appliquer le **thm de la double limite** à la suite des sommes partielles,

et assurer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = 0$ .

Enfin, on peut conclure que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) dt$  Ce qui est conforme au résultat obtenu pour  $E$ .

**Question II. 4. 3. 1.** Si on effectue le changement de variable  $u = xt$  dans l'intégrale, pour  $0 \leq \beta < \delta$ , on a :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_{\beta}^{\delta} |\sin(xt)| dt = \frac{1}{x} \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du.$$

$\frac{\beta x}{\pi}$  et  $\frac{\delta x}{\pi}$  sont deux réels positifs et pour  $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$  on a  $\frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} = \frac{(\delta - \beta)x}{\pi} > 1$ .

Il existe donc deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $\begin{cases} p \text{ partie entière de } \frac{\beta x}{\pi} \text{ donc } p \leq \frac{\beta x}{\pi} < p+1 \\ q \text{ partie entière de } \frac{\delta x}{\pi} \text{ donc } q \leq \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \\ \text{et } 0 \leq p < q \end{cases}$  et quand  $x \rightarrow \infty$ , par le thm d'encadrement (thm "des gendarmes" ou "du sandwich"), on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \text{ existe et vaut } \frac{2}{\pi} (\delta - \beta)$$

Ainsi  $p\pi \leq \beta x < (p+1)\pi$  et  $q\pi \leq \delta x < (q+1)\pi$  donc

$$[(p+1)\pi, q\pi] \subset [\beta x, \delta x] \subset [p\pi, (q+1)\pi]$$

Puisque la fonction qu'on intègre est positive et continue sur  $\mathbb{R}$ , on a l'encadrement entre les intégrales :

$$\int_{(p+1)\pi}^{q\pi} |\sin(u)| du \leq \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du \leq \int_{p\pi}^{(q+1)\pi} |\sin(u)| du$$

De plus pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| du = \int_0^\pi |\sin(v)| dv = \int_0^\pi \sin(v) dv = 2$  avec  $v = u - k\pi$

Ainsi  $\int_{(p+1)\pi}^{q\pi} |\sin(u)| du = 2(q-p-1)$  et  $\int_{p\pi}^{(q+1)\pi} |\sin(u)| du = 2(q+1-p)$

d'où un encadrement de  $F(x)$  :  $\frac{2}{x}(q-p-1) \leq F(x) \leq \frac{2}{x}(q-p+1)$  pour  $x > \frac{\beta x}{\delta - \beta}$

Mais  $\begin{cases} p \leq \frac{\beta x}{\pi} < p+1 \\ q \leq \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \end{cases}$  donc  $\begin{cases} -(p+1) < -\frac{\beta x}{\pi} \leq -p \\ q \leq \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \end{cases}$  et

$\begin{cases} q-p < \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} + 1 \\ \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} - 1 < q-p \end{cases}$   
ainsi  $\frac{2}{x} \left( \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} - 2 \right) \leq F(x) \leq \frac{2}{x} \left( \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} + 2 \right)$  pour  $x >$

**Question II. 4. 3. 2.** Selon les cas, par extention de résultats successifs.

• Si  $f$  est une **fonction en escalier** et  $J$  un **segment**, alors il existe une subdivision  $(\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $J$  telle que  $f$  soit constante égale à  $y_k$  sur chacun des intervalles  $]\beta_k, \beta_{k+1}[$ .

Donc  $\tilde{f}(x) = \int_J f(t) |\sin(xt)| dt = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} f(t) |\sin(xt)| dt =$

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} |\sin(xt)| dt$$

Cette combinaison linéaire de fonctions ayant des limites quand  $x \rightarrow \infty$  a une limite qui vaut :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k \frac{2}{\pi} (\beta_{k+1} - \beta_k) = \frac{2}{\pi} \sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k (\beta_{k+1} - \beta_k)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$$

• Si  $f$  est **continue par morceaux** sur  $J$  un **segment**, alors il existe une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions en escaliers qui converge uniformément sur  $J$  vers  $f$ . Ainsi  $N_\infty^J(f - \varphi_n) = \sup_J |f(t) - \varphi_n(t)| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Les applications  $f \mapsto \tilde{f}$  et  $f \mapsto \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$  sont linéaires, donc pour la différence (où  $x > 0$ ) :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt &= \left[ \tilde{f}(x) - \widetilde{\varphi_n}(x) \right] + \left[ \widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt \right] + \left[ \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right] \\ &= \widetilde{f - \varphi_n}(x) + \left[ \widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt \right] + \frac{2}{\pi} \int_J [\varphi_n(t) - f(t)] dt \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| \leq L(J) N_\infty^J(f - \varphi_n) + \left| \widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt \right| + \frac{2}{\pi} L(J) N_\infty^J(f - \varphi_n)$$

où  $L(J)$  est la **longueur** du segment  $J$ . Par la convergence uniforme sur  $J$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $n_0$

$$\text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \implies \left( N_\infty^J(f - \varphi_n) < \frac{\varepsilon}{L(J) \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)} \right) \implies$$

$$\left( L(J) \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) N_\infty^J(f - \varphi_n) < \varepsilon \right)$$

Pour un  $\varepsilon > 0$ , fixons donc un tel  $n = n_0$ . Pour ce  $n_0$ , puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \widetilde{\varphi_{n_0}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_{n_0}(t) dt, \text{ il existe un } x_0 \text{ tel}$$

$$\text{que pour tout } x \geq x_0 \text{ on ait } \left| \widetilde{\varphi_{n_0}}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_{n_0}(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous assurons qu'il existe  $x_0 > 0$ , t. q.  $\forall x >$

$$0, (x \geq x_0) \implies \left( \left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| < 2\varepsilon \right)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$$

• Si  $f$  est **continue par morceaux** sur  $J = [0, \infty[$ , on peut reprendre pour un  $\varepsilon > 0$  donné, le raisonnement de la

question II. 2. avec un  $A$  suffisamment grand pour que

$$\int_A^\infty |f(t)| dt \leq \varepsilon. \text{ Alors :}$$

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_{[0, \infty[} f(t) dt \right| &= \left| \int_0^\infty f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| \end{aligned}$$

Pour ce  $A$  ainsi choisi, avec le segment  $J' = [0, A]$  et le résultat ci-dessus, il existe  $x_0$  tel que

$$\forall x > 0, (x \geq x_0) \implies \left( \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| < \varepsilon \right)$$

$$\text{et alors } \forall x > 0, (x \geq x_0) \implies \left( \left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| < \left(2 + \frac{2}{\pi}\right) \varepsilon \right).$$

$$\text{Et on a donc assuré de même que } \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$$