PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Libre

Règle de Raabe-Duhamel

9 NOVEMBRE 2012

Corrigé Pr. Devulder, CPGE France

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

① Si $\lambda < 0$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1^+$ et la règle de D'Alembert s'applique à la série positive $\sum(u_n)$ pour donner sa divergence (à partir d'un certain rang, $u_{n+1}/u_n \geq 1$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq u_{n_0} > 0$ et on a même divergence grossière de la série).

② On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

③ ① Comme $\beta - \lambda < 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers 0^- et est asymptotiquement négatif. Ainsi

$$\exists N /\ \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

② Ce qui précède s'écrite $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n}$ et une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq N,\ u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

③ Comme $\sum v$ converge (car $\beta > 1$), il en est de même de $\sum(Kv_n)$. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la convergence de $\sum(u_n)$.

④ Si $\lambda \in [0,1[$, on peut choisir $\beta \in]\lambda, 1[$. On a alors

$$\exists N /\ \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

Comme $K \neq 0$ et $\sum v$ diverge (car $\beta < 1$), $\sum(Kv_n)$ diverge. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la divergence de $\sum(u_n)$.

⑤ $\sum(x_n)$ est une série de Riemann divergente et $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Une comparaison série intégrale donne (grâce à la décrois-

sance de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^2}$ sur $]1,+\infty[)$

$$\forall n \geq 3,\ \sum_{k=3}^{n} y_k \leq \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$\sum(y_n)$ est ainsi convergente (les sommes partielles forment une suite croissante et, on vient de le voir, majorée ; la suite des sommes partielles converge donc). De plus $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + o(1/n)$ donne

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut ainsi être dans le cas $\lambda = 1$ avec convergence ou divergence de la série (on a bien un contre-exemple puisque les séries proposées sont à termes > 0).

Partie B.

① On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme (w_n) est à terme strictement positifs, on est dans le cas précédent avec $\lambda = \dfrac{1}{6} < 1$ et $\sum(w_n)$ diverge.

② ① $t \mapsto \dfrac{1}{(t^4+1)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $1/t^{4n}$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux fonctions de Riemann ($4n \geq 4 > 1$). La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale I_n sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

② Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} &= \left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^b + 4n\int_0^b \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt \\ &= \frac{b}{(1+b^4)^n} + 4n\left(\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Les différents termes admettent une limite quand $b \to +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$$

③ On a ainsi $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{4n}$. Comme $\sum(I_n)$ est une séries à termes > 0, on est dans le cas de la partie A avec $\lambda = 1/4 < 1$ et $\sum(I_n)$ diverge.

③ ① On reconnaît les coefficients du développement de $S(x) = (1+x)^\alpha$. Le rayon de convergence de la série vaut 1 (on pourrait, par exemple, utiliser la règle de D'Alembert pour le voir).

② α n'étant pas un entier naturel, les a_k sont tous non nuls. On a

$$\forall n \geq \alpha,\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On est dans le cadre de la partie A (suite à termes > 0) avec $\lambda = \alpha+1$. Ici, α n'est pas entier naturel et donc $\alpha+1 \neq 1$. Comme il y a convergence de $\sum(a_n)$ pour $\alpha+1 < 1$ et divergence si $\alpha+1 > 1$, il y a donc convergence si et seulement si $\alpha > 0$.

③ On a

$$\forall x \in [-1,1],\ |a_n x^n| \leq |a_n|$$

On est dans le cas ($\alpha > 0$) où le majorant est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(a_n x^n)$ converge normalement sur $[-1,1]$. Comme c'est une série de fonctions continues, la somme S est continue sur $[-1,1]$. On a ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-}(1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \lim_{x\to(-1)^+} S(x) = \lim_{x\to(-1)^+}(1+x)^\alpha = 0$$

④ On suppose $\alpha < -1$. On est dans le cadre de $A.1$ pour $\sum(|a_n|)$. On y a vu qu'il y a avit divergence grossière. $(|a_n|)$ n'étant pas de limite nulle, il en est de même de (a_n) et $\sum(a_n)$ diverge grossièrement elle aussi.

⑤ On a

$$\ln(|a_n|) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{|\alpha-k|}{k+1}\right)$$

Or, on remarque que (pour $k\geq 1$)

$$\ln\left(\frac{k-\alpha}{k+1}\right) = \ln\ln\left(1-\frac{\alpha+1}{k+1}\right) \sim -\frac{\alpha+1}{k+1}$$

C'est le terme général d'une série divergente négative dont les sommes partielles tendent donc vers $-\infty$. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(|a_n|) = -\infty$$

Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Mais d'après $3.b$, $(|a_n|)$ décroît à partir d'un certian rang (le quotient $|a_{n+1}|/|a_n|$ tendant vers 1^-) et la suite (a_n) est alternée (on passe de a_n à a_{n+1} en multipliant par un nombre négatif). La règle spéciale s'applique et indique que $\sum(a_n)$ converge.
Si $x\in[0,1]$, on peut de même appliquer la règle spéciale pour prouver la convergence de $\sum(a_n x^n)$ et obtenir

$$\forall x\in[0,1],\ \left|\sum_{k\geq n} a_k x^k\right| \leq |a_n x^n| \leq |a_n|$$

Le majorant est indépendant de x et de limite nulle quand $n \to +\infty$. $\sum(a_n x^n)$ est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ et S est donc continue sur $[0,1]$. Comme en question c, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-}(1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

FIN

Á la prochaine