PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Règle de Raabe Duhamel (e3a 2009, PSI)

9 NOVEMBRE 2012

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accrocs ils augmenteront les prix.
- Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
- Les deux vous explosent le système de temps en temps.
- Bill, comme les dealers, voudrait bien que tu revendes ses produits aux autres.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Mathématicien du jour

Mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895. Il est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable. Weierstrass étudia la fiabilité de l'analyse, dont il propose une construction logique rigoureuse. À cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës

Introduction :

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
Soit (α_n) une suite réelle.
On rappelle que la relation $\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

① Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

② Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} -$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

③ On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

① Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

② Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.

③ Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

④ On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

⑤ Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B.

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

① Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

② Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

① Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

② Établir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

③ En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

③ Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1\,;\, \forall n \geq 1,\, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,;\, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

① Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.

② Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

③ Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

④ Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

⑤ On suppose que $-1 < \alpha < 0$.

i) Prouver que $\lim_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.

ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

iii) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.