Devoir Libre

15 Transformée de Fourier, de Lebesgue. Séries de Dirichlet

Enoncé : CCP 2011, PSI

Notations. On note

$|z|$ le module du nombre complexe z.

J un intervalle de $[0,+\infty[$.

f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

g une fonction définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sous réserve de son existence, on note $\tilde{f}_g(x) = \int_J f(t)g(xt)\,dt$ pour $x > 0$.

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\tilde{f}(x)$ au lieu de $\tilde{f}_g(x)$.

Objectifs. Pour différentes hypothèses sur la fonction f, sur l'intervalle J et pour deux choix de g, on se propose de déterminer la limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Dans la partie **1**, on étudie un exemple explicite avec application à des calculs de sommes de séries.

Dans la partie **2**, on considère une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles et l'objectif est d'obtenir la limite en $+\infty$ de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = |\sin(t)|$, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ ou lorsque f est continue par morceaux.

Partie I : Une étude de séries.

Etude de la fonction L. Pour tout x réel tel que la série entière $\sum\left((-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}\right)_{k\geq 1}$ converge, on note $L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ sa somme.

1.1 Préciser le rayon de convergence de cette série entière, montrer que la fonction L est définie sur $]-1,1]$ et expliciter $L(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

1.2 Montrer, avec soin, que la fonction L est continue sur l'intervalle $[0,1]$. En déduire que $L(1) = \ln(2)$.

Etude de la série $\sum\left(\dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)\right)_{k\geq 1}$. On considère la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{3p} = -\dfrac{2}{3p}$; $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{3p+1} = \dfrac{1}{3p+1}$ et $a_{3p+2} = \dfrac{1}{3p+2}$

2.1 Montrer que

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p}\frac{1}{k} = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}$$

2.2 déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{3p} a_k$ lorsque $p \to +\infty$ (on pourra considérer la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable).

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

En déduire la convergence de la série $\sum(a_k)_{k\geq 1}$ et préciser sa somme.

2.3 En déduire que la série $\sum\left(\frac{1}{k}\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)_{k\geq 1}$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Etude des séries $\sum\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)_{k\geq 1}$ et $\sum\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)_{k\geq 1}$. Pour $t \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(t) = \frac{1}{e^{it}-1}$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$.

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera $\pi \leq \alpha < 2\pi$.

3.1 Montrer que $S_n(t) = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$.

3.2 Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^1([\pi, \alpha])$.

3.3 Montrer que l'intégrale $\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\ dt$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

3.4 Expliciter $\int_\pi^\alpha S_n(t)\ dt$. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum\left(\frac{e^{ik\alpha}}{k}\right)_{k\geq 1}$. Expliciter la somme $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\ dt$.

3.5 Exprimer $e^{it}\varphi(t)$ en fonction de $\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où $t \in [\pi, \alpha]$.

3.6 En déduire la convergence des séries $\sum\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)_{k\geq 1}$ et $\sum\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)_{k\geq 1}$. Expliciter leur somme respective. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu en **1.2.3** ?

Partie II : Limite d'une intégrale.

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)|\ dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(xt)\ dt$ pour $x > 0$.

Existence de $\tilde{f}_g(x)$. On suppose que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1. Justifier l'existence de $\tilde{f}_g(x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que la fonction $\tilde{f}_g$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles. Soit $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\ dt$.

2.1. Justifier l'affirmation :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel positif A tel que
$$\int_A^{+\infty} |f(t)|\ dt \leq \varepsilon$$

2.2. Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

2.3. En déduire la limite de $\tilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Dans toute la suite, on suppose $g(t) = |\sin(t)|$ et on note simplement

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\,dt$$

Etude pour une fonction f particulière. On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$. et donc $\tilde{E}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)|\,dt$ pour $x > 0$.

3.1. Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{\gamma y}\sin(y)\,dy$.

3.2. Montrer que pour $x > 0$,

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,du$$

3.3. Exprimer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\,du$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

3.4. Justifier, pour $x > 0$, la convergence de la série $\sum(e^{-\frac{k\pi}{x}})_{k\geq 0}$. Préciser sa somme.

3.5. Expliciter $\tilde{E}(x)$ pour $x > 0$. Déterminer la limite de $\tilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Etude générale. On désigne de nouveau par f une fonction quelconque continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge et on note

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\,dt \quad \text{pour} \quad x > 0$$

4.1. Lemme préliminaire.
Pour tout réel t tel que la série $\displaystyle\sum\left(\frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}\right)_{k\geq 1}$ converge, on pose $h(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$. Montrer que la fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Justifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}h(t)$$

4.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas $\mathcal{C}^1$.
On suppose de plus que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. En utilisant les résultats obtenus dans la partie **2.2** et la question précédente, déterminer la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Le résultat est-il conforme à celui obtenu pour la fonction E ?

4.3. Cas d'une fonction continue par morceaux.

4.3.1 Une limite.
Etant donnés deux nombres réels β et δ tels que $0 \leq \beta < \delta$, on considère, pour $x > 0$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_\beta^\delta |\sin(xt)|\,dt$. Montrer que $F(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_{\beta x}^{\delta x}|\sin(u)|\,du$.

On pose p la partie entière de $\dfrac{\beta x}{\pi}$ et q celle de $\dfrac{\delta x}{\pi}$. Pour $x > \dfrac{\pi}{\delta - \beta}$, donner un encadrement de $F(x)$ en fonction de p, q et x.

En déduire que $F(x)$ tend vers $\dfrac{2}{\pi}(\delta - \beta)$ lorsque $x \to +\infty$.

4.3.2 Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux.

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et si f est une fonction continue par morceaux sur J à valeurs réelles et telle que l'intégrale $\int_J |f(t)|\, dt$ existe, on note toujours

$$\tilde{f}(x) = \int_J f(t)|\sin(tx)|\, dt$$

Quelle est la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$:

- lorsque J est un segment et f une fonction en escalier ?
- lorsque J est un segment et f une fonction continue par morceaux ?
- lorsque $J = \mathbb{R}^+$ et f une fonction continue par morceaux ?