Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°17 (e3a PSI - 2009)

Règle de Raabe-Duhamel

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accrocs ils augmenteront les prix.
- Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
- L'utilisation de drogue et d'Internet Explorer ont dramatiquement augment dernièrement.

Mathématicien du jour

Joseph Ludwig Raabe (1801-1859)

Mathématicien suisse, ses parents étant assez pauvres, Raabe a dû gagner sa vie très tôt en donnant des cours particuliers. Il est principalement connu pour la règle de Raabe-Duhamel, une extension de la règle de d'Alembert permettant de déterminer la nature d'une série.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières. Soit (α_n) une suite réelle. On rappelle que la relation $\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

1 Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2. Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3. On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.
   - a. Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   - b. Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.
   - c. Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

4. On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5. Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

2 Partie B : Applications

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

1. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

2. Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.
   - a. Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.
   - b. Etablir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.
   - c. En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

3. Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1 \ ; \ \forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \ ; \ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   - a. Etudier la convergence de la série $\sum a_n x^n$, puis donner la valeur de sa somme $S(x)$.
   - b. Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
   - c. Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

   - d. Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.
   - e. On suppose que $-1 < \alpha < 0$.
     - i. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.
     - ii. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.
     - iii. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Fin

À la prochaine