

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°17 (e3a PSI - 2009)

Règle de Raabe-Duhamel

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :

- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accros ils augmenteront les prix.
- Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
- L'utilisation de drogue et d'Internet Explorer ont dramatiquement augmenté dernièrement.



Joseph Ludwig Raabe (1801-1859)

Mathématicien suisse, ses parents étant assez pauvres, Raabe a dû gagner sa vie très tôt en donnant des cours particuliers. Il est principalement connu pour la règle de Raabe-Duhamel, une extension de la règle de d'Alembert permettant de déterminer la nature d'une série.

Mathématicien du jour

\mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.

Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières. Soit (α_n) une suite réelle. On rappelle que la relation $\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\alpha_n = 0$.

1 Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- 1 Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
- 2 Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n , à déterminer.
- 3 On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.
 - a Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
 - b Déterminer un réel positif K , indépendant de n , tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.
 - c Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

- 4 → On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum \mathbf{u}_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum \mathbf{v}_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum \mathbf{u}_n$).
- 5 → Pour $n \geq 2$, on pose $\mathbf{x}_n = \frac{1}{n}$ et $\mathbf{y}_n = \frac{1}{\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum \mathbf{x}_n$ et $\sum \mathbf{y}_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

2 Partie B : Applications

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

- 1 → Pour $n \geq 2$, on pose $\mathbf{w}_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum \mathbf{w}_n$.

- 2 → Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4 + 1)^n}$.

- a Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note \mathbf{I}_n sa valeur.
- b Etablir que $\mathbf{I}_n = 4n(\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_{n+1})$.
- c En déduire la nature de la série $\sum \mathbf{I}_n$.

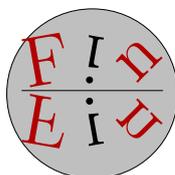
- 3 → Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$\mathbf{a}_0 = 1 ; \forall n \geq 1, \mathbf{a}_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} ; \mathbf{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a}_n x^n$$

- a Etudier la convergence de la série $\sum \mathbf{a}_n x^n$, puis donner la valeur de sa somme $\mathbf{S}(x)$.
- b Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum \mathbf{a}_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
- c Montrer que si $\alpha > 0$, \mathbf{S} est continue sur $[-\mathbf{R}, \mathbf{R}]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a}_n = 2^\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathbf{a}_n = 0$$

- d Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum \mathbf{a}_n$ diverge.
- e On suppose que $-1 < \alpha < 0$.
 - i Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(|\mathbf{a}_n|) = -\infty$.
 - ii Montrer que la série $\sum \mathbf{a}_n$ converge.
 - iii Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{a}_n$.



À la prochaine