Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°17 (Pr Devulder)

Règle de Raabe-Duhamel

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
- L'utilisation de drogue et d'Internet Explorer ont dramatiquement augment dernièrement.
- Les deux vous explosent le système de temps en temps.
- Billy, comme les dealers, voudrait bien que tu revendes ses produits aux autres.

Jean-Marie Constant Duhamel (1797-1872)

Mathématicien du jour

Mathématicien et physicien français, il est l'auteur de travaux sur les équations aux dérivées partielles, sur l'acoustique et la propagation de la chaleur. Le principe de Duhamel dans les équations aux dérivées partielles est né de ses travaux sur la distribution de la chaleur dans un solide avec une température variable.
Reçu une première fois à l'École polytechnique, préfère se présenter de nouveau pour être mieux classé. Il fût reçu une seconde fois, mais licencié à cause de ses opinions libérales. Il devient alors répétiteur puis directeur des études au collège et enfin professeur au lycée Louis-le-Grand puis professeur à l'École polytechnique et à la Faculté des sciences de Paris et membre de l'Académie des sciences

1 Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

1 Si $\lambda < 0$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1^+$ et la règle de D'Alembert s'applique à la série positive $\sum (u_n)$ pour donner sa divergence (à partir d'un certain rang, $u_{n+1}/u_n \geq 1$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > 0$ et on a même divergence grossière de la série).

2 On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3 a) Comme $\beta - \lambda < 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers 0^- et est asymptotiquement négatif. Ainsi

$$\exists N / \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

b) Ce qui précède s'écrite $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n}$ et une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq N,\ u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

c Comme $\sum v$ converge (car $\beta > 1$), il en est de même de $\sum(Kv_n)$. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la convergence de $\sum(u_n)$.

4 Si $\lambda \in [0, 1[$, on peut choisir $\beta \in]\lambda, 1[$. On a alors

$$\exists N / \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

Comme $K \neq 0$ et $\sum v$ diverge (car $\beta < 1$), $\sum(Kv_n)$ diverge. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la divergence de $\sum(u_n)$.

5 $\sum(x_n)$ est une série de Riemann divergente et $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Une comparaison série intégrale donne (grâce à la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^2}$ sur $]1, +\infty[$)

$$\forall n \geq 3,\ \sum_{k=3}^{n} y_k \leq \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$\sum(y_n)$ est ainsi convergente (les sommes partielles forment une suite croissante et, on vient de le voir, majorée ; la suite des sommes partielles converge donc). De plus $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + o(1/n)$ donne

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut ainsi être dans le cas $\lambda = 1$ avec convergence ou divergence de la série (on a bien un contre-exemple puisque les séries proposées sont à termes > 0).

2 Partie B : Applications

1 On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme (w_n) est à terme strictement positifs, on est dans le cas précédent avec $\lambda = \frac{1}{6} < 1$ et $\sum(w_n)$ diverge.

2 a $t \mapsto \frac{1}{(t^4+1)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $1/t^{4n}$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux fonctions de Riemann ($4n \geq 4 > 1$). La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale I_n sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

b Une intégration par paties donne

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} &= \left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^b + 4n\int_0^b \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt \\ &= \frac{b}{(1+b^4)^n} + 4n\left(\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Les différents termes admettent une limite quand $b \to +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$$

c On a ainsi $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{4n}$. Comme $\sum(I_n)$ est une séries à termes > 0, on est dans le cas de la partie A avec $\lambda = 1/4 < 1$ et $\sum(I_n)$ diverge.

3 a On reconnaît les coefficients du développement de $S(x) = (1+x)^\alpha$. Le rayon de convergence de la série vaut 1 (on pourrait, par exemple, utiliser la règle de D'Alembert pour le voir).

b α n'étant pas un entier naturel, les a_k sont tous non nuls. On a

$$\forall n \geq \alpha,\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On est dans le cadre de la partie A (suite à termes > 0) avec $\lambda = \alpha + 1$. Ici, α n'est pas entier naturel et donc $\alpha + 1 \neq 1$. Comme il y a convergence de $\sum(a_n)$ pour $\alpha + 1 < 1$ et divergence si $\alpha + 1 > 1$, il y a donc convergence si et seulement si $\alpha > 0$.

c On a

$$\forall x \in [-1,1],\ |a_n x^n| \leq |a_n|$$

On est dans le cas ($\alpha > 0$) où le majorant est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(a_n x^n)$ converge normalement sur $[-1,1]$. Comme c'est une série de fonctions continues, la somme S est continue sur $[-1,1]$. On a ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x\to(-1)^+} S(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (1+x)^\alpha = 0$$

d On suppose $\alpha < -1$. On est dans le cadre de $A.1$ pour $\sum(|a_n|)$. On y a vu qu'il y a avit divergence grossière. $(|a_n|)$ n'étant pas de limite nulle, il en est de même de (a_n) et $\sum(a_n)$ diverge grossièrement elle aussi.

e On a

$$\ln(|a_n|) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{|\alpha-k|}{k+1}\right)$$

Or, on remarque que (pour $k \geq 1$)

$$\ln\left(\frac{k-\alpha}{k+1}\right) = \ln\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{k+1}\right) \sim -\frac{\alpha+1}{k+1}$$

C'est le terme général d'une série divergente négative dont les sommes partielles tendent donc vers $-\infty$. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$$

Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Mais d'après $3.b$, $(|a_n|)$ décroît à partir d'un certian rang (le quotient $|a_{n+1}|/|a_n|$ tendant vers 1^-) et la suite (a_n) est alternée (on passe de a_n à a_{n+1} en multipliant par un nombre négatif). La règle spéciale s'applique et indique que $\sum(a_n)$ converge.

Si $x \in [0,1]$, on peut de même appliquer la règle spéciale pour prouver la convergence de $\sum(a_n x^n)$ et obtenir

$$\forall x \in [0,1],\ \left|\sum_{k\geq n} a_k x^k\right| \leq |a_n x^n| \leq |a_n|$$

Le majorant est indépendant de x et de limite nulle quand $n \to +\infty$. $\sum (a_n x^n)$ est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ et S est donc continue sur $[0,1]$. Comme en question $\mathbf{c}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} S(x) = \lim_{x \to 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

Fin !

À la prochaine