.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°18 (Pr Devulder)

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Un élève se lève et va baisser le store, Le prof : T'arrivais pas à dormir ?
- Un prof M. à ses élèves : L'an prochain, quand on vous demandera le nom de votre prof de maths de l'an dernier, ne dites surtout pas que c'était moi.
- Un élève : Pardon monsieur, je ne vois pas bien ce qui est écrit sur le tableau ! Le prof : Désolé, ça fait longtemps que j'essaye de perdre du poids, j'ai toujours pas réussi !

Jean le Rond D'Alembert(1717-1783)

Mathématicien du jour

Mathématicien et philosophe français. Il fût abandonné par sa mère, le deuxième jour de sa naissance, devant la porte de la chapelle Saint-Jean-le-Rond.
Il obtint le baccalauréat en arts, puis suivit les cours de l'école de Droit. Refusant de s'inscrire au barreau, il entreprit des études de médecine. Il commence ses premiers travaux scientifiques en astronomie. Ami de Voltaire, il était un habitué des salons parisiens. D'Alembert est considéré comme un théoricien de la musique. Ses études de la vibration des cordes font de lui l'un des fondateurs de la physique mathématiques.
Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'à 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivés partielles.

1 Réorganisation des termes d'une série semi-convergente.

A.1. On suit la définition de l'énoncé.

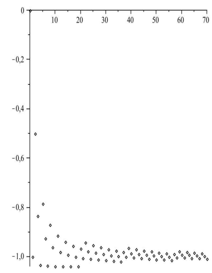
```
suite :=proc(x,n)
local k,p,q,s,S,list ;
p :=0 ;q :=0 ;S :=0 ;list :=[] ;
for k from 1 to n do
   if S>x then q :=q+1 ;s :=2*q-1
   else p :=p+1 ;s :=2*p fi ;
   S :=S+(-1)^s/s  ; print(evalf(S)) ;
   list :=[op(list),s]
   od  ;
list
end  :
```

A.2. Voici, à titre indicatif, une fonction permettant l'affichage des points (n, S_n).

```
suite2 :=proc(x,n)
local k,p,q,s,S,list ;
p :=0 ;q :=0 ;S :=0 ;list :=[[0,0]] ;
for k from 1 to n do
   if S>x then q :=q+1 ;s :=2*q-1
   else p :=p+1 ;s :=2*p fi ;
```

```
    S :=S+(-1)^s/s  ;
    list :=[op(list),[k,S]]
    od  :
  plot(list,style=point) ;
  end  :
```

Pour $x = -1$ et $n = 70$, on obtient le dessin suivant :



Ce n'est pas le schéma de l'énoncé ! Celui-ci a été tracé avec une fonction `suite` où le test sur S_n est $S_n \geq x$ (et non $S_n > x$). cela ne change rien au principe de l'algorithme. On s'arrange pour choisir les s_n de façon que les S_n “oscillent” autour de x et que $S_n \to x$. Pour ce faire, on choisit le premier indice pair non utilisé si l'on est en-dessous de x (on ajoute alors un terme positif et le premier indice impair sinon (on ajoute alors un terme négatif). Les suites (p_n) et (q_n) permettent de savoir quel est le dernier indice pair ou impair utilisé ($2p_n$ ou $2q_n - 1$).

B. On procède par récurrence sur n.
- Initialement, on a $q_1 = s_1 = 1$, $S_1 = -1$ et $p_1 = 0$ (cas $x < 0$) ou $p_1 = 1$, $s_1 = 2$, $S_1 = 1/2$ et $q_1 = 0$ (cas $x \geq 0$). Dans les deux cas, on a la propriété voulue.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On doit encore distingur deux cas.
  - Si $S_n > x$ alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.
  - Si $S_n \leq x$ alors $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.

On en déduit que

$$\text{card}\{s(1), \ldots, s(n)\} = p_n + q_n = n$$

ce qui indique que les $s(k)$ sont deux à deux distincts et que s est injective (si $s(a) = s(b)$ avec $a < b$ alors l'ensemble $\{s(1), \ldots, s(b)\}$ contient au plus $b - 1$ éléments).

C.1. Soit (m_n) une suite d'entiers qui converge vers une limite ℓ. Par définition des limites (avec $\varepsilon = 1/3 > 0$)

$$\exists\, n_0 / \ \forall n \geq n_0, \ |m_n - \ell| \leq 1/3$$

Par inégalité triangulaire, on a $|m_n - m_r| \leq 2/3$ pour $n, r \geq n_0$ et comme on a des termes entiers, $m_r = m_n$ pour $n, r \geq n_0$. La suite est donc constante à partir du rang n_0.

C.2.

a. La suite (p_n) est croissante (puisque p_{n+1} est égal à p_n ou à $1 + p_n$). Si elle est majorée, elle converge. Etant composée d'entiers, elle stationne à partir d'un certain rang n_0. Par définition, on a donc pour tout $n \geq n_0$, $S_n > x$ et $q_{n+1} = 1 + q_n$ ce qui donne (par récurrence) $q_n = n - n_0 + q_{n_0}$. De plus, pour $n \geq n_0$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2n - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1$. Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \ S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_{s_k} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1}$$

Le changement d'indice $j = k - 1$ donne la formule voulue. La série associée à $\left(\dfrac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} + 1}\right)_{k \geq n_0}$ est divergente positive et ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. L'égalité ci-dessus donne alors $S_n \to -\infty$ ce qui contredit $s_n > x$ pour tout $n \geq n_0$.

b. La suite (p_n) étant croissante et non majorée, le théorème de limite monotone indique que $p_n \to +\infty$.

C.3. Le raisonnement est identique pour montrer que (q_n) est de limite infinie : c'est une suite croissante ; si elle est majorée alors elle converge et stationne à partir d'un rang n_0 ; pour $n \geq n_0$, on a $S_n \leq x$ et $S_n \to +\infty$ ce qui est incompatible.

C.4. Comme $0 \leq p_{n+1} - p_n \leq 1$ et $p_n \to +\infty$, les p_n décrivent tout $\mathbb{N}$. Il en est de même des q_n. Avec l'identité ensembliste de **I.B**, on en déduit que tout entier non nul est atteint par s (et pour un entier non nul car $s(0) = 0$). s est donc surjective de $\mathbb{N}^*$ dans lui même. On a aussi vu l'injectivité et on a donc la bijectivité.

D.1. On distingue deux cas.

- Si $S_n > x$ alors $u_{s_{n+1}} < 0$ car s_{n+1} est impair et

$$u_{s_{n+1}} \leq S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leq S_n - x$$

- Si $S_n \leq x$ alors $u_{s_{n+1}} \geq 0$ car s_{n+1} est pair et

$$S_n - x \leq S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leq u_{s_{n+1}}$$

$a \leq b \leq c$ entraînant $|b| \leq \max(|a|, |c|)$, on a donc dans tous les cas

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|)$$

ce qui correspond à l'alternative demandée.

D.2. Soit N un entier naturel. On ne peut avoir $\forall n > N,\ S_n > x$ (sinon, comme en **C.2.a** on obtient une contradiction) et on ne peut avoir non plus $\forall n > N,\ S_n \leq x$ (cette fois comme en **C.2.b**). On peut, par exemple, trouver $n > N$ tel que $S_{n+1} \leq x < S_n$ (ou l'inverse). On a alors s_{n+1} impair et $u_{s_{n+1}} < 0$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} \leq x < S_n$. En particulier, $|S_n - x| = S_n - x \leq S_n - S_{n+1} = |u_{s_{n+1}}|$.
Remarque : il ne s'agit pas vraiment d'une "déduction" comme demandé.

D.3. Comme (p_n) est de limite infinie, p_n finit par être plus grand que 1 (pour $n \geq n_1$). De même, q_n finit par être plus grand que 1 et

$$\forall n \geq \max(n_1, n_2),\ p_n \geq 1 \text{ et } q_n \geq 1$$

D.4. Comme s_{n+1} vaut soit $2p_{n+1}$ soit $2q_{n+1} - 1$, la question **D.1** montre que

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|) \leq \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|) = v_n$$

De plus, la croissance de p_n et q_n ainsi que la décroissance de $|u_n|$ donnent

$$|u_{2p_{n+2}}| \leq |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n \text{ et } |u_{2q_{n+2}-1}| \leq |u_{2q_{n+1}-1}| \leq v_n$$

On en déduit finalement que

$$v_{n+1} = \max(|S_{n+1} - x|, |u_{2p_{n+2}}|, |u_{2q_{n+2}-1}|) \leq v_n$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée (par 0) et donc converge. Avec **D.2**,

$$\forall N,\ \exists n_N > N / \ 0 \leq v_{n_N} \leq u_{s(n_N+1)}$$

Quand $N \to +\infty$, $n_N \to +\infty$ et on peut passer à la limite ci-dessus (les termes admettent une limite) et on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

D.5. En particulier $0 \leq |S_n - x| \leq v_n \to 0$ et $S_n \to x$, ce que l'on voulait prouver (on a exhibé une bijection s telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$).

E.1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2}$$

$\sum (u_{n+1} - u_n)$ est ainsi absolument convergente et donc aussi convergente. Comme

$$\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1$$

on en déduit que (u_n) converge. En notant γ sa limite, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

E.2. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\ln(2n)-\frac{1}{2}\ln(n)+\frac{\gamma}{2}+o(1)=\frac{1}{2}\ln(n)+\ln(2)+\frac{\gamma}{2}+o(1)$$

E.3.

a. On procède par récurrence sur n.

- Comme en $\mathbf{B}$, le résultat est initialement vrai que $x>0$ ou $x\leq 0$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n\geq 1$. Si $S_n>x$ alors on ajoute $u_{2q_{n+1}-1}=-\dfrac{1}{2q_{n+1}-1}$ et $p_{n+1}=p_n$. Sinon, on ajoute $u_{2p_{n+1}}=\dfrac{1}{2p_{n+1}}$ et $q_{n+1}=q_n$. La formule reste donc toujours vraie au rang $n+1$.

b. Comme p_n et q_n tendent vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}(\ln(p_n)+\gamma+o(1))-\left(\frac{1}{2}\ln(q_n)+\ln(2)+\frac{\gamma}{2}+o(1)\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right)-\ln(2)+o(1)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)-\ln(2)+o(1)
\end{aligned}$$

c. Comme $S_n\to x$, on a (continuité de exp) $\dfrac{p_n}{n-p_n}\to 4e^{2x}$ c'est à dire $\dfrac{n}{p_n}\to\dfrac{e^{-2x}}{4}+1$ ou encore

$$p_n\sim\frac{4n}{e^{-2x}+4}$$

et de la même façon (en remplaçant p_n par $n-q_n$ dans la formule de la question précédente)

$$q_n\sim\frac{n}{1+4e^{2x}}$$

d. On prouve comme en a. que

$$\sum_{k=1}^{n}|u_{s_n}|=\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k-1}$$

et, comme en b, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n}|u_{s_n}|=\frac{1}{2}\ln(p_nq_n)+\gamma+\ln(2)+o(1)\sim\frac{1}{2}\ln(p_nq_n)$$

Quand $x_n\to+\infty$ et $x_n\sim y_n$ alors $\ln(y_n)=\ln(x_n(1+o(1)))=\ln(x_n)+o(1)\sim\ln(x_n)$. On a donc ici

$$\ln(p_nq_n)\sim\ln\left(\frac{4n^2}{(4+e^{-2x})(1+4e^{2x})}\right)\sim 2\ln(n)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{s_1}|+\cdots+|u_{s_n}|}{|u_1|+\cdots+|u_n|}=1$$

(numérateur et dénominateur sont tous deux équivalents à $\ln(n)$).

2 Suites vérifiant $(\mathbf{P}_1)$ et $(\mathbf{P}_2)$.

A. Soit (u_n) une suite bornée et M un majorant des $|u_n|$. On a

$$\forall n,\ |a_nu_n|\leq|a_n|$$

La convergence absolue de $\sum(a_n)$ entraîne celle de $\sum(a_nu_n)$ et $(\mathbf{P}_1)$ est vérifiée.

B.1. Comme $\mathbb{C}$ est complet, la convergence de $\sum |a_{n+1} - a_n|$ entraîne celle de $\sum (a_{n+1} - a_n)$ ce qui, en revenant aux sommes partielles et grâce à un telescopage, équivaut à la convergence de la suite (a_n).

B.2. En posant $U_{-1} = 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n(U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=0}^{N} a_n U_{n-1}$$

On opère le changement d'indice $k = n - 1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes de même indice pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) U_k + a_0 U_{-1} = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) U_k$$

Supposons que $\sum (u_n)$ converge. La suite (U_n) converge donc. Comme elle est bornée et que $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge absolument, la question A indique que $\sum ((a_n - a_{n+1}) U_n)$ converge. De plus, $(a_n U_n)$ est une suite convergente (produit de telles suites). L'égalité prouvée indique alors que $\sum (a_n u_n)$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite). On a prouvé la propriété (P_2) pour la suite (a_n).

C. Posons $u_n = \dfrac{\overline{a_n}}{|a_n|}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon. On a alors, $a_n u_n = |a_n|$ (on le vérifie quand $|a_n| \neq 0$ et dans l'autre cas). Ainsi, $\sum (a_n u_n)$ diverge et on a (u_n) qui est bornée puisque formée d'éléments de module 1. La suite (a_n) ne vérifie donc pas (P_1).
Finalement, les suites vérifiant (P_1) sont exactement celle dont la série associée converge absolument.

D.1. On applique les définitions de l'énoncé.

```
exemple :=proc(n)
local k,p,e,A,list  ;
p :=0 ;e :=1 ;A :=9/4 ;list :=[[0,p,e,A]] ;
for k from 1 to n do
  if A>=p then p :=1+p ;e :=e/2 fi ;
  A :=A+e*9/(4*(k+1)) ;
  list :=[op(list),[k,p,e,A]]
  od  :
list
end :
```

Les six premiers termes trouvés sont

$$[0, 0, 1, \frac{9}{4}],\ [1, 1, \frac{1}{2}, \frac{45}{16}],\ [2, 2, \frac{1}{4}, 3],\ [3, 3, \frac{1}{8}, \frac{393}{128}],\ [4, 4, \frac{1}{16}, \frac{1983}{640}],\ [5, 4, \frac{1}{16}, \frac{999}{320}]$$

D.2.

a. Supposons que la suite (p_n) stationne à partir d'un certain rang N. On a alors (ε_n) qui stationne à partir de ce même rang (quand p n'évolue pas, ε n'évolue pas) et donc

$$\forall n \geq N,\ A_n = A_N + \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

Comme (a_n) est une suite de réels positifs de série divergente, les sommes partielles de cette série tendent vers $+\infty$. Comme $\varepsilon_N > 0$ (tous les ε_k sont > 0 par récurrence), l'identité ci-dessus indique que $A_n \to +\infty$. Il existe donc $k \geq N$ tel que $A_k \geq p_k = p_N$ et alors $p_{k+1} = 1 + p_k \neq p_N$ ce qui est une contradiction.
Ainsi, la suite (p_n) ne stationne pas à partir du rang N et il existe $n > N$ tel que $p_n \neq p_{n-1}$ et donc tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$.
On peut alors montrer par récurrence que la suite (n_k) de l'énoncé est bien définie puisque si n_k est connu alors $\{n \in \mathbb{N} / \ n > n_k \ \text{ et } \ p_n = 1 + p_{n-1}\}$ est un ensemble non vide d'entiers et qu'il contient donc un minimum.

b. Pour $k \geq 1$, on a $n_k = \{n \in \mathbb{N} / \ n > n_{k-1} \ \text{ et } \ p_n = 1 + p_{n-1}\}$ et donc

$$p_{n_{k-1}} = p_{n_{k-1}} = \cdots = p_{n_k - 1} \ \text{ et } \ p_{n_k} = 1 + p_{n_{k-1}}$$

d'où l'on déduit que

$$\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{n_{k-1}}$$

Comme $p_{n_0} = p_0 = 0$ et $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon_0 = 1$, on en déduit par récurrence que

$$\forall k,\ p_{n_k} = k \text{ et } \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

(ε_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. De plus, $(\varepsilon_{n_k})_k$ est une extraite de $(\varepsilon_n)_n$ (la suite des n_k croît strictement) et est de limite nulle. Ainsi, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

De façon similaire, la suite (A_n) des sommes partielles de $\sum(a_n\varepsilon_n)$ est croissante et on a une extraite qui tend vers $+\infty$ ($A_{n_k-1} \geq p_{n_k-1} = p_{n_{k-1}} = k-1 \to +\infty$). On a donc $A_n \to +\infty$ et $\sum(a_n\varepsilon_n)$ qui diverge.

c. Au vu des termes calculés en **II.D.1**, pour la suite envisagée ici, on a

$$n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3$$

puisque $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ et $p_3 = 3$ (on gagne une unité à chacune de ces étapes).

D.3.

a. On gère un indice m tel que le dernier élément ajouté à la liste est $[m, u_{n_m}]$. Par rapport à la fonction `exemple`, on doit gérer l'évolution de m (et la liste construite n'est pas la même).

```
indexer :=proc(n)
local k,p,e,A,list,m ;
p :=0 ;e :=1 ;A :=1 ;list :=[[0,0]] ;m :=0 ;
for k from 1 to n do
  if A>=p then p :=1+p ;e :=e/2 ;m :=m+1 ;list :=[op(list),[m,k]] fi ;
  A :=A+e/(k+1)
  od  :
list
end :
```

b. On a vu plus haut que

$$A_{n_k-1} \geq p_{n_k-1} = p_{n_{k-1}} = k-1$$

On a $k-1 = p_{n_{k-1}} = \cdots = p_{n_k-1}$ et $\dfrac{1}{2^{k-1}} = \varepsilon_{n_{k-1}} = \cdots = \varepsilon_{n_k-1}$. Si on suppose que $n_k - 2 > n_{k-1}$ alors $p_{n_k-1} = p_{n_k-2}$, $\varepsilon_{n_k-1} = \varepsilon_{n_k-2}$. Ainsi $A_{n_k-2} \leq p_{n_k-1}$ (sinon l'indice p aurait augmenté) et

$$A_{n_k-1} = A_{n_k-2} + a_{n_k-1}\varepsilon_{n_k-1} = A_{n_k-2} + \frac{1}{n_k}\frac{1}{2^{k-1}} \leq (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$$

On en déduit que

$$A_{n_k} = A_{n_k-1} + a_{n_k}\varepsilon_{n_k} \leq (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}} + \frac{1}{(1+n_k)2^k}$$

Comme $n_k \geq k$ et $k \geq 3$, on en déduit que

$$A_{n_k} \leq k-1 + \frac{1}{k2^{k-1}} + \frac{1}{(1+k)2^k} \leq k-1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} < k = p_{n_k}$$

et on a donc $p_{1+n_k} = p_{n_k}$ et $\varepsilon_{1+n_k} = \varepsilon_{n_k}$ puis

$$A_{1+n_k} = A_{n_k} + a_{1+n_k}\varepsilon_{1+n_k} = A_{n_k} + \frac{1}{(2+n_k)2^{n_k}} \leq k-1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} + \frac{1}{40} < k = p_{1+n_k}$$

ce qui donne $p_{2+n_k} = p_{1+n_k} = p_{n_k}$ et $n_{k+1} > 2 + n_k$.

c. Par définition,

$$A_{n_{k+1}-1} = A_{n_k-1} + \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \varepsilon_j$$

Par définition de n_k et n_{k+1}, les ε_j ci-dessus valent tous $\varepsilon_{n_k} = 1/2^k$ et donc

$$A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{1+j}$$

Une comparaison série-intégrale (avec la fonction décroissante $x \mapsto 1/x$) donne

$$\ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) = \int_{1+n_k}^{1+n_{k+1}} \frac{dt}{t} \leq \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{1+j} \leq \int_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

et on a donc

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

d. Comme $n_3 - 2 = 49 > 2 = n_2$, on montre avec $\mathbf{D.3.b}$ et une récurrence que

$$\forall k \geq 3,\ n_k - 2 > n_{k-1}$$

et on a ainsi

$$\forall k \geq 3,\ k-1 \leq A_{n_k-1} \leq (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$$

De l'inégalité de droite, et comme $A_{n_{k+1}-1} \geq k$, on déduit que

$$A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^{k-1} n_k} + A_{n_{k+1}-1} - 1$$

ce que l'on peut écrire

$$A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \geq 1 - \frac{1}{2^{k-1} n_k}$$

Avec la question précédente, on a alors

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \geq 2^k (A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}) \geq 2^k - \frac{2}{n_k}$$

On peut écrire par ailleurs que

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) = \ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

ce qui nous donne, avec la question précédente,

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k (A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

On utilise alors la question $\mathbf{b}$ et $k-1 \leq A_{n_k-1}$ pour obtenir

$$A_{n_{k+1}-1} \leq k + \frac{1}{2^k n_{k+1}} \leq A_{n_{k-1}} + 1 + \frac{1}{2^k n_{k+1}}$$

et on combine les deux dernière ingéalités pour en déduire

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

e. La nature de la suite de terme général $w_k = \ln(n_k) - 2^k$ est la même que celle de la série de terme général

$$w_{k+1} - w_k = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) - 2^k$$

La question précédente donne

$$-\frac{2}{n_k} \leq w_{k+1} - w_k \leq \frac{1}{n_{k+1}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

ce qui entraîne

$$|w_{k+1} - w_k| \leq \frac{2}{n_k} + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

$\ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$ est le terme général d'une série convergente car la suite de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$ converge (elle est de limite nulle puisque $n_k \to +\infty$). Ainsi, pour prouver que $\sum(w_{k+1} - w_k)$ converge absolument, il suffit de montrer que $\sum(1/n_k)$ converge. Or, on a évidemment

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \varepsilon_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

et donc, pour k suffisamment grand, $k - 1 \leq A_{n_k - 1} \leq \frac{1}{2}\ln(n_k)$ ou encore

$$\frac{1}{n_k} \leq e^{-2(k-1)}$$

ce qui montre que $\sum(1/n_k)$ est une série positive convergente. Finalement, (w_k) est une suite convergente. En notant ℓ la limite de la suite (w_k), la continuité de l'exponentielle donne $e^{w_k} = n_k e^{-2^k} \to e^\ell$ et donc (comme $e^\ell \neq 0$)

$$n_k \sim Ce^{2^k} \quad \text{avec} \quad C = e^\ell$$

On a vu plus haut que si $x_n \sim y_n \to +\infty$ alors $\ln(x_n) \sim \ln(y_n)$, on en déduit ici (en utilisant deux fois ce résultat) que

$$\ln(n_k) \sim 2^k \quad \text{et} \quad \ln(\ln(n_k)) \sim k\ln(2)$$

La question $\mathbf{b}$ donne alors (on a vu que l'inégalité de cette question est valable pour tout $k \geq 3$)

$$A_{n_k - 1} \sim k - 1 \sim k \sim \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$$

Soit n un entier. Il existe un entier k tel que $n_k - 1 \leq n \leq n_{k+1} - 1$. On remarque que n_k est de limite infinie quand $n \to +\infty$ (k dépend de n et est de limite infinie quand $n \to +\infty$ lui aussi). $\ln(\ln(n_k - 1)) \leq \ln(\ln(n)) \leq \ln(\ln(n_{k+1}))$ et majorant et minorant équivalent tous deux à $\ln(\ln(n_k))$ (et aussi à $k\ln(2)$). Ainsi $\ln(\ln(n_k)) \sim \ln(\ln(n))$. De plus on a l'encadrement $A_{n_k - 1} \leq A_n \leq A_{n_{k+1} - 1}$. Majorant et minorant sont tous deux équivalents à k c'est à dire à $\frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$ c'est à dire à $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}$. On a prouvé que

$$A_n \sim \frac{\ln(\ln(n))}{2}$$

Etant donnée la croissance de la suite (n_k), la fonction `indexer` risque fort de ne pas nous donner beaucoup d'éléments de cette suite !

E.

a. Soit (ε_n) une suite de limite nulle. On pose $\varepsilon'_n = \text{signe}(a_n)\varepsilon_n$. (ε'_n) est une suite de limite nulle et donc $\sum(a_n \varepsilon'_n) = \sum(\varepsilon_n |a_n|)$ converge.

b. Si $\sum |a_n|$ divergeait (par l'absurde), la question **II.D** donnerait une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\sum |a_n|\varepsilon_n$ diverge et on obtiendrait une contradiction. Ainsi, $\sum |a_n|$ converge.

F.1. Supposons, par l'absurde, que (a_n) n'est pas bornée. Pour tout M et tout N, il existe un entier $n \geq N$ tel que $|a_n| \geq M$ (sinon, la suite $(a_n)_{n\geq N}$ est bornée et (a_n) l'est donc aussi). On peut ainsi construire par récurrence une suite n_k telle que $|a_{n_0}| \geq 1$ et

$$\forall k \geq 0,\ n_{k+1} = \min\{n > n_k / \ |a_n| \geq 2^{k+1}\}$$

Soit alors (x_n) telle que

$$\forall k,\ x_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

les autre x_n étant nuls. $\sum(x_n)$ converge (la suite des sommes partielles est croissante et majorée par $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$) et

$$\forall k,\ |x_{n_k} a_{n_k}| \geq 1$$

ce qui montre que $(x_n a_n)$ n'est pas de limite nulle et entraîne la divergence de $\sum(x_n a_n)$ en donnant une contradiction.

F.2. Par le même calcul qu'en **II.B.2** on a

$$(*)\ :\ \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k)a_k + \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0$$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ est le terme général d'une série convergente (puisque (ε_k) converge) et donc $\sum(\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k)a_k$ converge. De plus $\varepsilon_n a_{n+1} \to 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle). $(*)$ montre alors que $\sum(\varepsilon_n(a_{n+1} - a_n))$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite).

F.3. La question **II.E** montre alors que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

F.4. On a prouvé que les suites vérifiant (P_2) sont exactement les suites (a_n) telles que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

À la prochaine