PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Surveillé (4h)

Un procédé de sommation

LUNDI 3 DÉCEMBRE 2012

Blague du jour

Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?
- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon

Mathématicien du jour

Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale supérieure. C'est Émile Picard qui dirigea ses travaux de recherches.
Son nom est lié à la suite de matrices (H_{2^k}) utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.

Problème I : CCP 2006, PSI

Objectifs.

Dans les parties I et II, on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier à une fonction à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

Notations. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $|z|$ son module, et pour tout entier naturel n, on note :

① $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,

② $[|0, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$,

Etude d'un procédé de sommation

③ $\binom{n}{k}$ le nombre de parties ayant k élément d'un ensemble de n éléments, pour $k \in [|0, n|]$.

On rappelle :

① la valeur de $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [|0, n|]$,

② la formule du binôme : si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel, alors

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

Enfin, si n est un entier naturel non nul, on note σ_n la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et on pose $\sigma_0 = 0$.

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes.

Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.

A toute suite complexe a, on associee la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$.

Partie I : deux exemples.

I.1. Cas d'une suite constante.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

I.1.1. Expliciter $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3. La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

I.2. Cas d'une suite géométrique.

Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

I.2.1. Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

I.2.2. On suppose que $|z| < 1$.

1.2.2.1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

1.2.2.2. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3. On suppose que $|z| \geq 1$.

I.2.3.1. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$?

I.2.3.2. Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3. On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : étude du procédé de sommation.

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

II.1. **Comparaison des convergences des deux suites.**

II.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [|0, n|]$.

II.1.1.1. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2. Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.
On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4. On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

II.2. **Comparaison des convergences des séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

II.2.1. Pour $n \in [|0,3|]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k$.

II.2.2. On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [|0,n|]$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

II.2.2.1. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question $II.2.1$?

II.2.2.2. Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [|0,n|]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

II.2.3. On suppose que la série $\sum(a_n)$ est convergente. Montrer que la série $\sum(a_n^*)$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4. La convergence de la série $\sum(a_n)$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum(a_n^*)$?

Partie III : une étude de fonctions.

On rappelle que : $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = 0$.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose : $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n$

III.4. **La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\ln(n)$ le logarithme népérien de n.

III.4.1. Soit $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1.1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} w_k$ est convergente.

III.4.1.2. En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.

III.4.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n.

III.4.3. Montrer en utilisant $III.4.1$ et $III.4.2$ que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

III.5. **Étude de la fonction ϕ.**

III.5.1. Déterminer le domaine de convergence R de la série $\sum_{n\geq 1} \sigma_n x^n$.

III.5.2. Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction ϕ, et étudier ses variations sur $[0, R[$.

III.5.3. **Valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.**

En utilisant les résultat de la partie II et de la question $III.4.3$ expliciter la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

III.5.4. Expliciter $\phi(x)$ pour $x \in \Delta$ et retrouver la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Problème II : Mines-Ponts 2008, MP

Espaces de Lorentz

Notations :

- Soit Q une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note B_Q la forme bilinéaire associée : pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$,
$$B_Q(x,y) = {}^t x.Q.y$$
et on note Φ_Q la forme quadratique associée : $\Phi_Q(x) = B_Q(x,x)$.
- Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on dira que Φ_Q est définie positive (respectivement positive, respectivement définie négative) sur V lorsque $\Phi_Q(x) > 0$ pour tout x appartenant à V (respectivement $\Phi_Q(x) \geqslant 0$, respectivement $\Phi_Q(x) < 0$). On notera $\mathcal{V}^+$ (respectivement $\mathcal{V}_0^+$, respectivement $\mathcal{V}^-$) l'ensemble des sous-espaces vectoriels sur lesquels Φ_Q est définie positive (respectivement positive, respectivement définie négative).
- On pose $r(\Phi_Q) = \max\limits_{V\in\mathcal{V}^+} \dim V$ et $s(\Phi_Q) = \max\limits_{V\in\mathcal{V}^+} \dim V$, avec la convention que $\max\limits_{V\in\emptyset} dim V = 0$.

☞ Dans toute cette partie, Q est une matrice symétrique réelle inversible. On note $^{(}Q) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la suite de ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité, $n^+(Q)$le nombre de termes strictement positifs dans $^{(}Q)$ et $n^-(Q)$ le nombre de termes strictement négatifs dans $^{(}Q)$.

① Soit $H \in \mathcal{V}^+$ et $G \in \mathcal{V}^-$, montrer que H et G sont en somme directe et que $r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) \leq n$

② Montrer que $r(\Phi_Q) \geq n^+(Q)$.
On a alors de même $s(\Phi_Q) \geq n^+(Q)$.

③ Montrer que $r(\Phi_Q) = n^+(Q)$ et que $s(\Phi_Q) = n^-(Q)$.

④ Soit R une autre matrice symétrique réelle inversible de taille n telle qu'il existe une constante λ satisfaisant la propriété suivante : $\|B_Q(x,y) - B_R(x,y)\| \leq \lambda \|x\| \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $r(\Phi_Q) = r(\Phi_R)$ si $\lambda \leq \delta$.

Espaces de Lorentz :

Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique et Φ_Q la forme quadratique associée. On dit que $(\mathbb{R}^n, Q)$ est un espace de Lorentz lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Q est inversible,
- $r(\Phi_Q) = 1$ et $s(\Phi_Q) = n - 1$.

⑤ On suppose dans cette partie que $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $(\mathbb{R}^n, Q)$ soit un espace de Lorentz. Soit a un vecteur tel que $\Phi_Q(a) > 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rho & \longmapsto & \Phi_Q(b + \rho a) \end{array}$$

a On suppose, dans cette question, que a et b sont linéairement indépendants. Montrer qu'il existe au moins une valeur de λ telle que $\varphi(\lambda) < 0$.

b Établir la propriété :

$$B_Q^2(a,b) \geq \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$$

avec égalité si et seulement si a et b sont colinéaires. On pourra s'inspirer de la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Fin

Bonne Chance