Devoir Libre

14 Suites et séries de fonctions

Blague du jour

Cinq ingénieurs et cinq commerciaux se déplacent pour aller à un salon. Chacun des 5 commerciaux va acheter un billet de train. Les ingénieurs n'achètent qu'UN seul billet. Les 5 ingénieurs vont s'enfermer dans les toilettes juste avant que le contrôleur n'arrive. En passant, le contrôleur voit que les toilettes sont occupées. (voir la suite en dessous)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

German mathematician who made lasting contributions to analysis and differential geometry, some of them enabling the later development of general relativity. His father was a poor Lutheran pastor who fought in the Napoleonic Wars. His mother, died before he had reached adulthood. Riemann exhibited exceptional mathematical skills, such as fantastic calculation abilities, from an early age but suffered from timidity and a fear of speaking in public.

Mathématicien du jour

Suite : Il frappe à la porte et demande : "Votre billet, s'il vous plaît !". Les ingénieurs glissent Le billet sous la porte. Le contrôleur est satisfait et s'en va. Les commerciaux sont bien sûr extrêmement vexés que les ingénieurs leur ont encore une fois fait la leçon. Pour le retour (voir prochain DL)

Problème I : Exemple d'étude

Soit $(u_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par : $u_0(x) = x$ pour tout réel x strictement positif. $u_n(x) = \dfrac{2\sqrt{u_n(x)}}{1+u_n(x)}$ pour tout entier naturel n , pour tout rel x strictement positif.

① Étude de la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$:

a Soit $u: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) = 1 \end{array}$ Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers u sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < u_n(x) \leqslant 1$

a Soit (U_n) la suite de fonctions définies pour tout entier naturel n sur $]0,+\infty[$ par : $U_n = \dfrac{1}{u_n}$.

i Montrer que : $U_n = \dfrac{1+U_n(x)}{2\sqrt{U_n(x)}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[$.

ii En déduire que : $|U_{n+1}-1| \leqslant \frac{1}{2}|U_n(x)-1|, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[$.

iii Montrer que la suite de fonctions (U_n) converge simplement vers u sur $]0,+\infty[$ et que la suite de fonctions (U_n) converge uniformément vers u sur tout compact de $]0,+\infty[$.

iv En déduire que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur tout compact de .

② Soit (v_n) la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,+\infty[, v_0(x)=1,\ v_n(x)=v_n(x)\frac{1+v_n(x)}{2}$$

a Soit x un rel strictement positif Montrer que les suites $(u_n(x)v_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ sont adjacentes.

On définit alors : $f: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\lim v_n(x) \end{array}$.

b Montrer que les suites de fonctions $(u_nv_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent uniformément vers f sur tout compact de $]0,\infty[$.

c En déduire que f est continue sur $]0,\infty[$.

Problème II : Fonction ζ et η de Riemann.

Soit $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

① Déterminer le domaine de définition de ζ.

② Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.

③ Prouver que $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$

Indication : majorer $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ par comparaison une intégrale.

④ Prouver que $\lim_{x\to1}\zeta(x)=+\infty$

⑤ Soit $\gamma=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$.

Montrer que $\gamma=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$ puis que $\gamma=1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}$.

⑥ **a** Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X)=\frac{1}{(1+X/n)^n-1}$.

b En déduire pour $x\in\mathbb{R}^*$: $\coth x=\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{e^{-2x}-1}=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+k^2\pi^2}$.

c En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

⑦ pour $x>0$: $\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a Établir pour $x>1$: $\eta(x)=(1-2^{1-x})\zeta(x)$.

b En déduire $\zeta(x)\sim\frac{1}{x-1}$ pour $x\longrightarrow1^+$.

c Montrer que $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + (1)$. On remarquera que $\dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.

c En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

⑧ Déterminer le domaine de définition de $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

⑨ Soit $s > 1$. Exprimer après avoir justifié son existence, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$ en fonction de $\zeta(s)$.

⑩ Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine, en déduire ses dérivées successives.

❶ Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$. Indication : majorer $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ par comparaison une intégrale.

❷ Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$

❸ Montrer que la fonction ζ est décroissante et convexe sur $]1, +\infty[$. Tracer la courbe de ζ.

❹ Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + o(2^{-x})$.

❺ **Constante d'Euler** : Soit γ définie par : $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$

Montrer que γ existe et que $\gamma = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k}$.

❻ a Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \dfrac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.

b En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \dfrac{1}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{e^{-2x}-1} = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + k^2\pi^2}$.

c En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

❼ **Fonction êta de Riemann** : Pour $x > 0$: $\eta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a Montrer que η est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b Établir pour $x > 1$: $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$. En déduire $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$ pour $x \longrightarrow 1^+$.

c Montrer que $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + (1)$. On remarquera que $\dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.

c En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

d Donner un développement asymptotique à deux termes de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

e Montrer que $\forall s > 1, \zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - p_n^{-s})^{-1}$, où $2 = p_1 < p_2 < .. < p_n < ..$ les nombres premiers.

f Pour $s > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} p_n^{-s}$ est-elle convergente ? La série $\sum_{n\geq 1} p_n^{-1}$ est-elle convergente ?

❽ Pour tout entier naturel n on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels plus petits que n et premiers avec n, dite fonction indicatrice d'Euler. Montrer que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ puis que pour tout réel $x > 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$.

❾ Soit u définie par $u_{p,q} = \frac{1}{p^q}$ pour tout $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$.

a Montrer que la suite u est sommable et calculer sa somme.

b Prouver l'identité suivante : $\sum_{q=2}^{+\infty}(\zeta(q) - 1) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} - 1\right) = 1.$

❿ Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leurs existences :

a $\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2}$

Réponse : $A = \zeta(2)^2$

b $\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p|q} \frac{1}{p^2q^2}$

Réponse : $B = \zeta(2)\zeta(4)$.

c $\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p\wedge q=1} \frac{1}{p^2q^2}$.

Réponse : $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

d $\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$.

Réponse : $-\frac{7}{8}\zeta(3)$.

Soit $s > 1$. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{sE(x)}{x^{s+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \zeta(s)$

FIN

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com