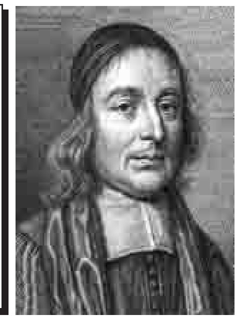
CPGE My Youssef, Rabat

DL 11 (09-10): *Suites et séries de fonctions*

3 février 2010

Blague du jour :
Comment un ingénieur informaticien tente-t-il de réparer sa voiture lorsqu'elle a un problème ? Il sort de la voiture, ferme toutes les fenêtres, retourne dans la voiture, et essaie de redémarrer.

Mathématicien du jour **Wallis**
John Wallis (1616-1703) est un mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie. Étudiant d'abord la théologie, il se réoriente ensuite vers les mathématiques et montre un grand talent pour la cryptographie durant la guerre civile, en décryptant les messages du camps adverse.
Ses travaux concernent principalement le calcul différentiel et intégral où il introduit les intégrales de Wallis. On lui doit également le symbole de l'infini ∞ que l'on utilise de nos jours.



PROBLÉME I : Source : Concours CCP- Niveau Deug, 2004.

Un calcul de l'intégrale de Gauss, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}\,x$

Le but du problème est de calculer l'intégrale de Gauss, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}\,x$ en utilisant une suite de fonctions qui converge vers $x \mapsto e^{-x^2}$.
Les deux premiers paragraphes sont **indépendants**, le troisième paragraphe utilise les résultats démontrés dans les deux paragraphes précédents.

Questions préliminaires

1. Montrer que l'intégrale I est bien définie.
2. On définit sur $[0,1[$ la fonction Ψ par $\Psi(t) = t + \ln(1-t)$.
   - **a.** Étudier les variations et le signe de Ψ .
   - **b.** Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de Ψ.

I. Un équivalent des intégrales de Wallis et une application

Pour tout entier naturel n, on définit la suite des intégrales de Wallis (I_n) par : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}\,x$.

3. **Une relation de récurrence**
   - **a.** Calculer I_0 et I_1.
   - **b.** Justifier que (I_n) est une suite de réels strictement positifs.
   - **c.** Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la suite (u_n) par $u_n = n I_{n-1} I_n$.
   Montrer que (u_n) est une suite constante et en déduire que $I_{n-1} I_n = \dfrac{\pi}{2n}$.
5. **Équivalent de I_n**

a. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$.

b. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

c. Donner alors un équivalent de (I_n) à l'infini.

6. Application :

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (J_n) par $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \, \mathrm{d}\, x$.

a. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $J_n = \sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) \, \mathrm{d}\, x$.

b. En déduire la limite de (J_n) en $+\infty$.

II. Intégration sur un intervalle non borné de la limite d'une suite de fonctions

Si (f_n) est une suite convergente de fonctions définies sur l'intervalle non borné $[0, +\infty[$, on souhaite trouver une condition suffisante pour pouvoir permuter limite et intégrale, c'est-à-dire avoir $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}\, x = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}\, x$. Le but du paragraphe est donc de donner cette condition suffisante.

A - La convergence uniforme est insuffisante ...

7. Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0, +\infty[$ la suite de fonctions (g_n) par :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n^2} \text{ si } x \in [0, n[\\ -\dfrac{x}{n^2} + \dfrac{2}{n} \text{ si } x \in [n, 2n[\\ 0 \text{ si } x \in [2n, +\infty[\end{cases}$$

a. Représenter le graphe de g_2.

b. Soit $n \geqslant 1$, montrer que g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x) \, \mathrm{d}\, x$ en utilisant des considérations géométriques.

c. Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

A-t-on $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) \, \mathrm{d}\, x = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} g_n(x) \, \mathrm{d}\, x$?

B - Une condition suffisante : convergence uniforme sur tout segment et domination

Soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui converge uniformément sur tout segment $[0, a]$ inclus dans $[0, +\infty[$ avec $a > 0$ vers une fonction f.

On suppose en plus que la suite (f_n) est dominée, c'est-à-dire qu'il existe une fonction g continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}\, x$ converge et telle que $\forall n \geqslant 1, |f_n| \leqslant g$.

8. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x$ converge.

9. Soit $\varepsilon > 0$.

a. On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction φ par $\varphi(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}\, x$.

Déterminer la limite de φ en $+\infty$ puis justifier l'existence d'un réel $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}\, x < \frac{\varepsilon}{4}$.

b. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}\, x \leqslant \int_0^{A} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}\, x + \frac{\varepsilon}{2}$.

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}\, x = \int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x$.

III. Application au calcul de l'intégrale de Gauss

Pour tout entier naturel n non nul, on définit sur $[0,+\infty[$ la suite de fonctions (f_n) par :

$$f_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x\in[0,\sqrt{n}[\\ 0 \text{ si } x\in[\sqrt{n},+\infty[\end{cases}$$

On note aussi f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^{-x^2}$.

10. Soit x un réel strictement positif.

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $f_n(x)\leqslant f(x)$ (on pourra utiliser la fonction Ψ).

b. Montrer que pour tout entier n vérifiant $n>x^2$, on a $|f_n(x)-f(x)|=e^{-x^2}\left(1-e^{n\Psi\left(\frac{x^2}{n}\right)}\right)$.

c. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$.

11. Soit a un réel strictement positif.
Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,a]$ vers f.

12. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\mathrm{d}x$ puis conclure quant à la valeur de I.

PROBLÉME II : Source : Concours E3A-PSI, 2005.

Fonctions dzêta et êta de Riemann

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel.

Partie A. Dans cette partie, on établit quelques résultats préliminaires qui pourront être utilisés dans les deux parties suivantes.

1. Pour $n\geqslant 1$, on pose : $u_n=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)-\ln(n)$. Etudier la nature de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$. en déduire que la suite $(u_n)_n$ converge. On note γ sa limite.
2. Pour x élément de $]0,+\infty[$, on considère l'application h_x de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$h_x(t)=\frac{\ln(t)}{t^x}$$

a. Déterminer le tableau de variation de h_x.
b. Justifier les inégalités : $\forall n\geqslant 3$, $\int_n^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}\,dt\leqslant\frac{\ln(n)}{n}$ et $\forall n\geqslant 4$, $\frac{\ln(n)}{n}\leqslant\int_{n-1}^n\frac{\ln(t)}{t}\,dt$.
c. Prouver que la série $\sum(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

$$\text{On pose : } S=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$$

Les deux parties qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie B. On se propose dans cette partie de calculer S.

Pour $n\geqslant 3$, on pose

$$S_n=\sum_{k=1}^n(-1)^k\frac{\ln(k)}{k},\ t_n=\sum_{k=1}^n\frac{\ln(k)}{k},\ a_n=t_n-\frac{(\ln(n))^2}{2}$$

1. Utiliser les inégalités établies en question $2.b$ de la partie A pour démontrer que :
a. la suite $(a_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante
b. La suite $(a_n)_n$ converge.

2. Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln(2)$. en déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$). déterminer S.

Partie C.

On note F l'application de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour $n \geqslant 1$, on considère l'application ϕ_n de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\phi_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
Dans cette partie on étudie d'abord le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, ensuite la série de fonction $\sum \phi_n$, puis on retrouve la valeur de S.
1. Pour $n \geqslant 1$, on considère les applications v_n et w_n de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dt$$

a. i. Calculer $v_n'(x)$.
ii. Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $[1,+\infty[$.
b. i. Prouver que pour $n \geqslant 1$, w_n est continue sur $[1,+\infty[$.
ii. Montrer que $\forall x \geqslant 1,\ \forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant w_n(x) \leqslant v_n(x)$.
iii. On considère la fonction W définie par $W = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.
Démontrer que W est définie et continue sur $[1,+\infty[$.
c. i. Montrer que $\forall x > 1,\ W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}$.
ii. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x}\right)$ (on exprimera le résultat en fonction de γ).
2.
a. Montrer que la série de fonctions $\sum \phi_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
b. Soit a un élément de $]0,+\infty[$. Démontrer que la série de fonctions $\sum \phi_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
c. On considère la fonction ϕ définie par $\phi = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n$. Montrer que ϕ est définie et de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
Exprimer $\phi'(1)$ sous forme de somme d'une série.
3.
a. Etablir que : $\forall x > 1,\ \phi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.
b. Déterminer un développement limité de $1 - 2^{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1, puis un développement limité de $\phi(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 1. En déduire la valeur de S

Fin
À la prochaine