Corrigé : Pr. Deyris, CPGE France

1. Le rapport $\dfrac{t^n}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ si $|t|<1$, et diverge si $|t|>1$: le rayon de convergence de la série entière est donc 1.

2. L'égalité est claire pour $t=0$. D'autre part, on sait que, pour tout $t\in]-1,1[$, $\ln(1+t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}t^k}{k}$. On en déduit $\dfrac{\ln(1-t)}{t}=-\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{t^{k-1}}{k}$ pour t non nul dans $]-1,1[$, ce qui donne le résultat demandé en posant $n=k-1$.
On peut aussi dériver $tS(t)$ pour obtenir le résultat.

3. En tant que somme d'une série entière, la fonction $f=-S$ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$. Les théorèmes usuels montrent que f est de classe C^∞ sur $]-\infty,0[$. L'intersection de ces deux intervalles n'étant pas réduite à un point, cela montre que f est de classe C^∞ sur la réunion des deux, soit sur $]-\infty,1[$.

4. On a $\ln(1-t)>0$ sur $]-\infty,0[$ et $\ln(1-t)<0$ sur $]0,1[$. Dans tous les cas (y compris en 0), on a donc $f(t)<0$.

Partie II

1. Puisque f est de classe C^∞ donc continue sur $]-\infty,1[$, les résultats sur l'intégrale fonction de sa borne supérieure montrent que $L:x\longmapsto-\int_0^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur cet intervalle, et que sa dérivée est $-f$. Puisque cette dérivée est de classe C^∞, L est elle aussi de classe C^∞.

2. Montrons que f est intégrable sur $[0,1[$. On sait déjà qu'elle est continue sur cet intervalle. D'autre part, $f(t)\sqrt{1-t}$ a pour limite 0 en 1 (puisque $\sqrt{u}\ln u$ tend vers 0 en 0), donc $f(t)$ est négligeable devant $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ au voisinage de 1. Puisque g est positive et intégrable sur $[0,1[$, f est donc bien intégrable sur $[0,1[$.

Par suite, $L(x)$ a pour limite $-\int_0^1 f(t)\,dt$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

3. On a vu que L a pour dérivée $-f$ sur $]-\infty,1[$ (question **II-1**), et que $-f$ est strictement positive sur cet intervalle (question **I-4.**). Puisque L est de plus continue en 1, elle est donc strictement croissante sur $]-\infty,1]$.

4. Puisque f est la somme d'une série entière sur $]-1,1[$, on sait que la primitive de f qui s'annule en 0 est la somme de la série entière obtenue en primitivant terme à terme celle de f, et que le rayon de convergence de cette nouvelle série entière est le même que celui de la série de f, c'est-à-dire ici 1.

On en déduit $\forall x\in]-1,1[\quad L(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$.

5. Soit $x\in]-1,1[$. On peut appliquer la relation du **II-4** à x et $-x$, donc $L(x)+L(-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n+(-1)^nx^n}{n^2}$. Dans cette somme, les termes de rang impair sont tous nuls ; donc

$$L(x)+L(-x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2x^{2p}}{(2p)^2}=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^p}{p^2}=\frac{1}{2}L(x^2)$$

Puisque L est en particulier continue en 1 et en -1, on peut faire tendre x vers 1 dans cette relation pour obtenir $L(1)+2L(-1)=0$.

6. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, et la série numérique $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. La série entière $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ converge en fait normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$. On peut donc lui appliquer le théorème d'interversion de limites : compte tenu de la continuité de L en 1, on a

$$L(1) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Partie III

1. Il faut en fait supposer ici $n \geq 2$. Posons $a = 2^{n-1}$; soit $\varphi : m \longmapsto m + a$. Alors, a est pair (puisque $n-1 \geq 1 \ldots$) et $2^{n-1} + a = 2^n$, donc φ transforme les entiers impairs entre 0 et $2^{n-1} - 1$ en entiers impairs entre $a = 2^{n-1}$ et $2^n - 1$.
De plus, chaque entier impair b entre 2^{n-1} et $2^n - 1$ a un unique antécédent par φ, $b - a$, qui est de même un entier impair entre 0 et $2^{n-1} - 1$, d'où le résultat.

2. Puisque x est dans $]0, \pi/2[$, il en est de même pour $x/2$ et $(x+\pi)/2$; les différents sinus apparaissant dans la formule sont donc bien non nuls. De plus, puisque $\sin(u + \pi/2) = \cos u$ pour tout u, on a

$$\frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x+\pi}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{4}{\sin^2 x}$$

en utilisant $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$.

3. Pour $n = 1$, la relation à démontrer est $2 = \dfrac{1}{\sin^2(\pi/4)}$, donc est bien vérifiée.
Supposons établi à un rang $n \geq 1$ la relation $2^{2n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}$. Multiplions par 4 et appliquons la question précédente, en utilisant de plus $\sin(\pi - u) = \sin u$ pour la deuxième somme :

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2^{n+1}-2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

On vérifie alors que les nombres $2^{n+1} - 2k - 1$ sont les entiers impairs entre 2^n et $2^{n+1} - 1$, donc les $2k+1$ quand k décrit l'intervalle d'entiers $[2^{n-1}, 2^n - 1]$. On obtient donc bien la formule cherchée au rang $n+1$.

4. (a) On a $\sin''(x) = -\sin x \leq 0$ sur $[0, \pi/2]$, donc la fonction sinus est concave sur cet intervalle. En particulier, la courbe est donc au-dessus de la corde passant par les points d'abscisses 0 et $\pi/2$, qui est la droite d'équation $y = 2x/\pi$; cela fournit la relation demandée.
(b) Si $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$, alors $(2k+1)\pi/2^{n+1}$ est dans $[0, \pi/2]$, on peut donc lui appliquer le (a). Puisque tout est positif :

$$\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right) \geq \frac{4}{\pi^2}\,\frac{(2k+1)^2\pi^2}{(2^{n+1})^2} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \leq \frac{\pi^2}{4}\,\frac{}{(2k}$$

qui constitue le résultat demandé avec $C = \pi^2/4$. (c) Il semble que le concepteur du sujet ait eu dans l'idée d'utiliser un "théorème de convergence dominée pour les séries" (hors programme) : on transforme la somme du **3.** en somme infinie en rajoutant des termes nuls et on multiplie par $(\pi/2^{n+1})^2$ pour obtenir $\dfrac{\pi^2}{8} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}$.
On remplace ensuite chaque $a_{k,n}$ par sa limite quand n tend vers

$+\infty$, la majoration du (b) fournissant l'hypothèse de domination qui autorise ce passage à la limite.
À partir de **3.**, on peut déterminer la somme de la série de manière plus conforme au programme, de la manière suivante : on vérifie aisément que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc bornée sur $]0, \pi/2]$. Soit K majorant sa valeur absolue sur $]0, \pi/2]$.
Soit $n \geq 1$. Notons A_n la somme donnée en **3.** (qui vaut 2^{2n-1}). En posant $x_k = (2k+1)\pi/2^{n+1}$, on a alors

$$\left| A_n - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{2^{n+1}}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left| \frac{1}{\sin^2 x_k} - \frac{1}{x_k^2} \right| \leq K.2^{n-1}$$

Multiplions tout par $(\pi/2^{n+1})^2$; en tenant compte de la valeur de A_n, on obtient

$$\left| \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{K\pi^2}{2^{n+3}}$$

On vient donc de trouver une suite extraite de la suite des sommes partielles de la série $\sum 1/(2k+1)^2$, qui converge vers $\pi^2/8$; sachant que la série converge, $\pi^2/8$ est donc la limite de la suite des sommes partielles, donc la somme de la série.

5. Classiquement, on a $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{L(1)}{4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. La dernière somme valant $\pi^2/8$, on en déduit que $L(1) = \pi^2/6$.
La question **II-5** donne alors $L(-1) = -\pi^2/12$.

6. Pour tout $x \in]0,1[$, posons $M(x) = L(1-x) + L(x) + \ln x \ln(1-x)$. Puisque L est dérivable sur $]0,1[$, de dérivée $-f$, et que $1-x$ est dans cet intervalle, M est dérivable sur $]0,1[$, et, pour tout $x \in]0,1[$,

$$M'(x) = -L'(1-x) + L'(x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\ln x}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} + \ln($$

La fonction M est donc constante sur $]0,1[$; en prenant la limite en 0, compte tenu de la continuité de L en 1, on voit que cette constante vaut $L(1)$, d'où le résultat.

7. En prenant $x = 1/2$ dans la relation précédente, on obtient $2L(1/2) = L(1) - (\ln 2)^2$ d'où $\quad L(1/2) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}$.

8. Notons I l'intégrale proposée. On effectue le changement de variable $u = 1 - e^{-t}$:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{-\ln(1-u)}{u} \frac{du}{1-u} = -\int_0^{1/2} \left(\frac{\ln(1-u)}{u} + \frac{\ln(1-u)}{1-u} \right) du$$

À ce stade, on peut justifier l'existence de I : la dernière forme est bien définie, puisque la fonction intégrée est prolongeable par continuité au segment $[0, 1/2]$; et le changement de variable effectué réalisait un C^1-difféomorphisme entre les intervalles ouverts considérés.

Le calcul est maintenant immédiat. La fonction $u \longmapsto \dfrac{\ln(1-u)}{(1-u)}$ est la dérivée de $u \longmapsto -\ln^2(1-u)/2$, donc

$$I = L(1/2) + \frac{\ln^2 2}{2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Partie IV

1. Effectuons le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $L(x)$, pour éviter les problèmes de signes ; on obtient $L(x) = -\displaystyle\int_0^{-x} \frac{\ln(1+u)}{u}\, du$.

On a $\ln(1+u)/u \geq 1/u$ pour $u \geq e-1$, et, pour tout $a > 0$, $\int_a^y du/u$ a pour limite $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$. Donc, $L(x)$ a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

2. La fonction $x \longmapsto 1 - 1/x$ est continue et strictement croissante sur $]0,1[$. L'intervalle image est donc l'ouvert borné par les limites, c'est-à-dire $]-\infty, 0[$.

3. (a) Les fonctions $x \longmapsto 1-x$ et $x \longmapsto 1-1/x$ sont dérivables sur $]0,1[$, à valeurs respectivement dans $]0,1[$ et $]-\infty,0[$; puisque L est en particulier dérivable sur ces deux intervalles, h_2 est dérivable sur $]0,1[$. Pour tout $x \in]0,1[$:

$$h_2'(x) = -L'(1-x) + \frac{1}{x^2} L'(1-1/x) = \frac{\ln x}{1-x} + \frac{1}{x^2}\frac{x}{x-1}\ln x = -\frac{\ln x}{x}$$

(b) Puisque $x \longmapsto -\ln^2 x/2$ a pour dérivée $x \longmapsto -\ln x/x$ sur $]0,1[$, il existe un réel C tel que, pour tout $x \in]0,1[$, $h_2(x) = -\ln^2 x/2 + C$. En prenant la limite en 1, on obtient $C = 0$, d'où le résultat demandé.

4. Dans la relation précédente, posons $u = 1 - 1/x$. Plus précisément, pour tout $u < 0$, le nombre $x = 1/(1-u)$ est dans $]0,1[$; on peut donc lui appliquer la relation précédente, d'où, en divisant par u,

$$\forall u < 0 \quad \frac{1}{u} L\left(1 - \frac{1}{1-u}\right) + \frac{L(u)}{u} = -\frac{1}{2u}\ln^2\frac{1}{1-u} = -\frac{1}{2u}\ln^2(1-u)$$

Dans cette relation, le membre de gauche a pour limite 0 en $-\infty$ par croissances comparées. Dans le membre de droite, le terme $L(1-1/(1-u))$ a pour limite $L(1)$ quand u tend vers $-\infty$; le premier terme a donc pour limite 0 en $-\infty$. Par suite, $L(u)/u$ a pour limite 0 en $-\infty$.

5. Puisque L tend vers $-\infty$ en $-\infty$, mais que $L(x)/x$ y a pour limite 0, la courbe a une branche parabolique de direction horizontale.

Partie V

1. L'équation homogène associée équivaut à $xy' + y = 0$ sur J ; ses solutions sont les fonctions f vérifiant $xf(x) = K$ pour une certaine constante K, ce sont les fonctions de la forme $x \longmapsto K/x$ où K est une constante réelle.
L'ensemble des solutions est donc la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \longmapsto 1/x$.

2. On applique la méthode de variation des constantes : on cherche les solutions sous la forme $x \longmapsto K(x)/x$, où K est une fonction dérivable sur J. Après calculs, on obtient l'équation $(1-x)K'(x) = 1$.
Les solutions sur J sont donc les fonctions de la forme $x \longmapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x} + \dfrac{C}{x} = -f(x) + \dfrac{C}{x}$ où C est un réel quelconque.
On peut remarquer qu'il est bien plus rapide de résoudre en réécrivant dès le départ l'équation sous la forme $xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$.

3. Les solutions de $(\mathcal{F}_J)$ sont évidemment les primitives des solutions de $(\mathcal{E}_J)$, ce qui conduit directement à la formule donnée.

4. Pour obtenir une solution sur $]-\infty, 1[$, il faut raccorder une solution sur $]-\infty, 0[$ à une solution sur $]0,1[$ en 0.
Puisque L a une limite finie en 0, la seule manière d'obtenir une limite finie en 0 pour une telle solution est de choisir la constante A nulle ; puis, pour que les deux solutions aient la même limite en 0, il faut prendre la même valeur de B de part et d'autre de 0.
Réciproquement, toute fonction de la forme $L + B$, où B est un réel, est de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$ et vérifie l'équation sur cet intervalle (puisqu'en particulier $L'(0) = -f(0) = 1$). Les solutions cherchées sont donc les fonctions de la forme $L + B$, qui forment une droite affine.