Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°19

Théorèmes de Stone-Weierstrass

MP-CPGE Rabat

Théorème de Stone-Weierstrass 1

Démonstration par les polynômes de Bernstein

Soit E un evn de dimension finie . $C^0([0,1],E)$ est muni de la norme de la convergence uniforme

$$N_\infty(f) = \sup(\|f(t)\|, t \in [0,1])$$

On pose pour tout entiers $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \le k \le n$

$$E_{n,k} = X^k(1-X)^{n-k}$$

(Polynômes de BERNSTEIN : ils ont étés introduits par le mathématicien Bernstein au début du 20^{ieme}siècle , par des arguments probablistes : en effet dans la loi binomiale $B(n,p)$ qui compte le nombre de succes dans une suite de n épreuves indépendantes ,où p est la probabilité d'un succes sur une épreuve, la probabilité d'obtenir k succes est : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$)

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} E_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^n k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} E_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2 \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} E_{n,k}$

2. En déduire la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (k-nx)^2 E_{n,k} = nX(1-X)$

   Soit $f \in C^0([0,1],E)$ et $\varepsilon > 0$. On se propose de déterminer une fonction polynôme P à coefficients dans E

   $$\overrightarrow{P(x)} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} x^k \overrightarrow{a_k}, \text{ et } \overrightarrow{a_k} \in E$$

   telle que $N_\infty(f-P) < \varepsilon$

3. Soit $\alpha > 0$ et $t \in [0,1]$. On note

   $$A_n = \left\{ k \in < 0, n >, \left| \frac{k}{n} - t \right| \ge \alpha \right\}$$

   Montrer à l'aide de 2°que $\displaystyle\sum_{k \in A_n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^k(1-t)^{n-k} \le \frac{1}{4\alpha^2 n}$

4. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

   $$\forall (x,y) \in [0,1], |x-y| \le \alpha \Rightarrow \left\| \overrightarrow{f(x)} - \overrightarrow{f(y)} \right\| \le \varepsilon$$

5. On pose $\overrightarrow{P_n(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^k(1-t)^{n-k} \overrightarrow{f(\frac{k}{n})}$. Montrer que $\forall t \in [0,1]$

   $$\left\| \overrightarrow{P_n(t)} - \overrightarrow{f(t)} \right\| \le \frac{N_\infty(f)}{2\alpha^2 n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

   on appelle polynôme d'interpolation de Bernstein de f le polynôme $\overrightarrow{P_n}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} t^k(1-t)^{n-k} \overrightarrow{f(\frac{k}{n})}$.

   Calculer $\lim_{n\to\infty} N_\infty(\overrightarrow{P_n} - \overrightarrow{f})$

THEOREME DE STONE WEIERSTRASS TRIGONOMETRIQUE 2
(démonstration par les sommes Fejer CCP 2004)

On sait que pour toute fonction continue sur un intervalle compact $[a,b]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynômiale P telle que $\sup\{|f(x) - P(x)|, x \in [a,b]\} = N_\infty(f - P) < \varepsilon$. Ceci revient à dire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales P_n telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(P_n - f) = 0$, ou encore : f est la limite uniforme (ie:pour la norme N_∞) d'une suite de fonctions polynomiales. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note $e_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \to & e^{inx} \end{array}$ qui est donc une application 2π périodique. On appelle polynôme trigonomètrique toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $P = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e_k$. Le nom de polynôme vient du fait que $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k e^{ikt} = \sum_{k=-N}^{N} \alpha_k X^k$ ou l'on a posé $X = e^{it}$
Le théorème de Stone Wierstass pour les fonctions périodiques s'énonce ainsi:
Pour toute fonction continue 2π périodique f à valeurs dans $\mathbb{C}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynômiale trigonomètrique P telle que $\sup\{|f(x) - P(x)|, x \in [a,b]\} = N_\infty(f - P) < \varepsilon$.
Dans ce qui suit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$,est une fonction 2π périodique.

1. Justifier les formules $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \dfrac{\cos(\frac{mt}{2})\sin(\frac{(m+1)t}{2})}{\sin(\dfrac{t}{2})} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \dfrac{\sin(\frac{mt}{2})\sin(\frac{(m+1)t}{2})}{\sin(\dfrac{t}{2})}}$

2. Justifier l'existence de $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. De même soit $\varepsilon > 0$, justifier l'existence de $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout couple de réels (x,y) tels que $|x - y| < \delta_\varepsilon$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

3. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, .on pose $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$
   - préciser $c_n(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1
   - Montrer que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}dx}$

   On pose $S_N(f) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$, et, pour $m \in \mathbb{N}, \sigma_m(f) = \dfrac{1}{m+1}\sum_{N=0}^{m} S_N(f)$

   Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ $\boxed{\sigma_m(f)(t) = \dfrac{1}{2\pi(m+1)}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)\frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}dx}$

4. En déduire , si $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,$m \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
|\sigma_m(f)(t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi(m+1)}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(t))\frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}dx\right| \\
&\leq \varepsilon/2 + \frac{1}{2\pi(m+1)}\int_{\delta_\varepsilon \leq |x| \leq \pi} 2M\frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}dx \\
&\leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{(m+1)\sin^2(\frac{\delta_\varepsilon}{2})}
\end{aligned}
$$

   penser à vérifier que $\sigma_m(1) = 1$

5. Conclure .

À la prochaine