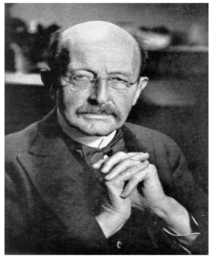
XM6-CPGE My Youssef

Devoir Surveillé

Suites et séries de fonctions

Rabat le 28 février 2010

Blague du jour :
• Pourquoi les fonctionnaires ne regardent jamais de leurs fenêtres le matin ?
Réponse : Par-ce qu'ils ne seront pas quoi faire l'après midi !
• Dans une ferme, deux cochons :
le premier : "Je ne me sens pas très bien, ce matin"
le deuxième : "Tais-toi, tu vas tous nous faire tuer".



Physicien du jour **Planck**
Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) est un physicien allemand, lauréat du Prix Nobel de physique en 1918, de la Médaille Lorentz en 1927, et du prix Goethe en 1945. Ses travaux s'intéressent à thermodynamique, l'électromagnétisme et à la physique statistique. C'est à la fin de 1900 qu'il présente la théorie des quanta, laissant Einstein l'étayer solidement après.

Source : Concours CCP-2007, MP.

PROBLÈME : ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

Toutes les fonctions de ce problème sont à valeurs réelles.

PARTIE PRÉLIMINAIRE

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

1) Fonction Gamma d'Euler

a) Soit $x \in]0,+\infty[$, montrer que la fonction $t \mapsto e{-}tt^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose, pour $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$

b) Déterminer, pour $x \in]0,+\infty[$, une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n.

2) Fonction zêta de Riemann

On rappelle que la fonction zéta est definie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On connait $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, on sait que pour p entier pair, $\zeta(p)$ est de la forme $q\pi^p$ où q est un rationnel ; il a été démontré que certains $\zeta(p)$ pour p entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous. On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels $\zeta(p)$.

a) On note, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ Prouver que, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$

b) On fixe l'entier $p \geqslant 2$ et un reel $\varepsilon > 0$. Indiquer une valeur de n pour laquelle on a $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \zeta(p)\right| \leqslant \varepsilon$

c) Donner, en utilisant la calculatrice, une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} pres.

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

Préliminaire : Dans les questions 3 à 5 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée, énoncé à la question 6.

3) Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

Démontrer le théorème suivant que l'on notera **TH 1** :
si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$, alors, la suite de réels $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ converge vers le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

On commencera par donner un sens à l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ juste en énonçant un théorème.

4) Exemples et contre-exemples

a) Déterminer une suite (f_n) de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment $[0,1]$ qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$ et telle que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)$ ne converge pas vers le réel $\int_0^1 f(x)\,dx$

Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer $f_n(x)$, mais on attend une justification des deux propriétés demandées

b) Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$, démontrer qu'il est possible que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)$ converge vers le réel $\int_0^1 f(x)\,dx$ sans que la convergence de la suite de fonctions (f_n) ne soit uniforme sur $[0,1]$.

5) Cas d'un intervalle quelconque

a) Montrer à l'aide de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $I=[0,+\infty[$ par

$$f_n(x)=\frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

que le **TH 1** n'est pas vrai si on remplace l'intervalle $[a,b]$ par un intervalle I non borné.

Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.

b) Nous allons prouver que le **TH 1** est vrai sur un intervalle borné I.

On considère (f_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur I intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction f sur I.

i. Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout réel $x\in I$, $|f(x)|\leqslant 1+|f_p(x)|$ et en déduire que f est intégrable sur I.

ii. Montrer que la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x)\,dx$. On notera $\ell(I)$ la longueur de l'intervalle I.

6) Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 2** :

si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout entier naturel n et tout réel $x\in I$: $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$ alors, la fonction f est intégrable sur I et la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)\,dx\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x)\,dx$

a) Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise ce **TH 2**, que les fonctions f_n sont intégrables sur I et justifier que f est intégrable sur I.

b) Exemples

i. Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratique sur un segment I sur lequel la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction f.

ii. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}\,dx$

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIES DE FONCTIONS

7) Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Justifier, simplement, à l'aide du **TH 1** le théorème suivant que l'on notera **TH 3** : si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$, alors, la série de réels $\sum\int_a^b f_n(x)\,dx$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx$$

8) Intégration terme à terme d'une série de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 4** :

si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I telle que la série $\sum\int_I |f_n(x)|\,dx$ converge, alors f est intégrable sur I, la série $\sum\int_I f_n(x)\,dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(x)\,dx=\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx$$

Application : théorème de Hardy

On suppose que $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

a) Montrer que la série de fonctions $\left(\sum\frac{a_n x^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $x\mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}\,dx$ comme la somme d'une série numérique.

9) Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas

a) Montrer que, la série de fonctions $(\sum(-1)^n x^n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle borné $I=[0,1[$ (donc les hypothèses du théorème **TH 3** ne sont pas toutes vérifiées).

b) Montrer que, pour la série de fonctions $(\sum(-1)^n x^n)_{n\geqslant 0}$ sur $I=[0,1[$, les hypothèses du théorème **TH 4** ne sont pas toutes vérifiées.

c) Montrer que, néanmoins, $(\sum \int_0^1 (-1)^n x^n \, dx)_{n\geqslant 0}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n \, dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \right) dx$$

10) Théorème de convergence monotone

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
On suppose que toutes les fonctions f_n sont positives sur I et que la fonction f est intégrable sur I.

On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in I$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée **TH 2**, et en déduire que : la série $(\sum \int_I f_n(x)\, dx)_{n\geqslant 0}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\, dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$

11) Application à la physique

a) Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} \, dt$

On détaillera toutes les étapes et on pourra remarquer que, pour $t \in]0,+\infty[$, on a $\frac{1}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$
Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.
La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique u_λ rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \lambda T}\right) - 1}$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann, c la célérité de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et T la température.
Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique u (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit : $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda \, d\lambda$
Si on note M l'exitance totale d'un corps noir on sait que M et u sont liés par la relation $M = \frac{c}{4} u$

b) Démontrer la loi de Stefan : $M = \sigma T^4$ où $\sigma = \frac{2\pi^5 (k_B)^4}{15 h^3 c^2}$

12) Généralisation

a) Exprimer de même pour x réel $x > 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt$ en fonction de $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$

b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt$ et une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} \, dt$

Fin
Bonne chance