Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé n°5

Coniques-quadriques
Séries numériques-intégration
Suites et séries de fonctions

MP-CPGE Rabat

Samedi 26 février 2011

Durée : 4 heures

Blague du jour

Cinq ingénieurs et cinq commerciaux se déplacent pour aller à un salon. Chacun des 5 commerciaux va acheter un billet de train. Les ingénieurs n'achètent qu'UN seul billet. Les 5 ingénieurs vont s'enfermer dans les toilettes juste avant que le contrôleur n'arrive. En passant, le contrôleur voit que les toilettes sont occupées. Il frappe à la porte et demande : "Votre billet, s'il vous plaît !".
Les ingénieurs glissent LE billet sous la porte. Le contrôleur est satisfait et s'en va. Les commerciaux sont bien sûr extrêmement vexés que les ingénieurs leur ont encore une fois fait la leçon. Pour le retour ... (voir la suite dans le corrigé)

Marshall Harvey Stone (1903-1989)

Mathématicien du jour

An American mathematician who contributed to real analysis, functional analysis, and the study of Boolean algebras. he published a classic monograph 662 pages long titled Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, a presentation about self-adjoint operators. Much of its content is now deemed to be part of functional analysis. In 1982, he was awarded the National Medal of Science.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisée pour cette preuve.

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 Problème 1 : CCP 2009, PSI

1.1 Notations.

Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\, dt$ converge, on note $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.

Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\,dt$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

1.2 Objectifs.

L'objet de ce problème est d'étudier l'existence et un procédé de calcul éventuel de J_1.

1.3 Etude de la fonction φ.

On désigne par d (respectivement δ) la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $d(t) = t - 1 + \cos(t)$ (repectivement $\delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$).

I.1. Etude des fonctions d et δ.

I.1.1 Etudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t} \leq \alpha$.

I.1.2 Etudier la fonction δ ; en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \beta$.

I.2. Existence de la fonction φ sur $[0,+\infty[$.

Etablir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$. En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$.

I.3. Limite de la fonction φ en $+\infty$.

I.3.1 Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$, pour $0 \leq x_1 \leq x_2$. En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.

I.3.2 Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser **I.1.2**).

I.4. Caractère $\mathcal{C}^k$ de la fonction φ.

I.4.1 Montrer que la fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$.

I.4.2 Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$sur $]0,+\infty[$ (on pourra utiliser **I.1.1**).

I.4.3 Montrer que la fonction φ' admet une limite finie (que l'on précisera) en $+\infty$.

I.4.4 Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

I.4.5 Expliciter $\varphi''(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

I.4.6 Expliciter $\varphi'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

I.5. Expression explicite de la fonction $\varphi(x)$.

I.5.1 déterminer la limite de $x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.5.2 Expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

I.5.3 Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0,+\infty[$.

I.5.4 Déterminer $\varphi(0)$.

1.4 Etude de l'existence de J_m.

II.1. Etude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\,dt$.

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\,dt$ pour tout entier naturel non nul m.

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t}\,dt$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

II.2. Etude de J_1.

Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1-\cos)' = \sin$).

En déduire la valeur de J_1.

2 Problème 2 : CNC 99, MP

Préliminaire : Dans ce problème on étudie quelques propriétés de la fonction ζ, somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$. On rappelle que la fonction Gamma est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Enfin on signale que l'utilisation de la comparaison séries-intégrales et de l'interversion du signe somme dans une suite double sommable sera très profitable dans ce problème.

2.1 Première partie

I-1 Montrer que la fonction ζ a pour domaine de définition $\mathbf{I}=]1,+\infty[$.

I-2-a Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ vers ζ sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>1$.
I-2-b Cette série de fonctions converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{I}$?

I-3-a Montrer que ζ est continue sur $\mathbf{I}$.
I-3-b Déterminer avec soin ses limites aux bornes de $\mathbf{I}$.
I-3-c Par comparaison avec une intégrale montrer l'équivalent $\zeta(s)\sim\frac{1}{s-1}$ au voisinage de 1.

I-4-a Montrer que ζ est de classe C^1 sur $\mathbf{I}$ et donner une expression de sa dérivée.
I-4-b Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $\mathbf{I}$ et donner une expression de ses dérivées successives.

I-5-a Montrer l'équivalent $\zeta(s)-1\sim 2^{-s}$ au voisinage de $+\infty$ et en déduire la convergence de la série

$$\sum_{k\geq 2}(\zeta(k)-1).$$

I-5-b En introduisant une suite double sommable bien choisie, calculer la somme de la série précédente.

I-6 On considère pour $n\geq 1$ la fonction P_n à valeurs complexes définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$P_n(x)=\frac{1}{2i}\left((\sqrt{x}+i)^{2n+1}-(\sqrt{x}-i)^{2n+1}\right).$$

I-6-a Montrer que P_n est polynomiale.
I-6-b Déterminer ses racines dans $]0,+\infty[$.
I-6-c En déduire les relations pour $n\geq 1$:

$$\sum_{1\leq k\leq n}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3};\qquad \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

I-6-d Démontrer, pour $t\in]0,\frac{\pi}{2}[$, les inégalités : $\operatorname{cotan} t\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sin t}$.
I-6-e En déduire que $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

2.2 Troisième partie

III-1 Montrer que la suite $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ est décroissante et converge vers un rel strictement positif γ (constante d'Euler).

III-2-a Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}+\ln(1-\frac{1}{n})\right)$.

III-2-b Établir la relation

$$\gamma = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln(1-\frac{1}{n})\right).$$

III-2-c En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq 2}\frac{\zeta(k)-1}{k}$ et l'identité

$$\gamma = 1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}.$$

III-3-a Étudier pour α rel l'intégrabilité de la fonction $t\mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$ sur l'intervalle$]0,+\infty[$. On posera

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}dt.$$

III-3-b En intégrant terme terme une série de fonctions bien choisie, établir la relation :

$$\forall \alpha>1,\ \zeta(\alpha)\Gamma(\alpha) = I_\alpha.$$

III-4-a Démontrer que pour tout $s\geq 1$, la fonction $t\mapsto \frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que son intégrale sur cet intervalle est gale $\ln s$.
(Indication : On pourra, par exemple, montrer que pour $\varepsilon>0$ on a : $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}dt = \int_\varepsilon^{s\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}dt$.)

III-4-b Montrer alors que

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}+e^{-2t}+\cdots+e^{-nt}-\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}\right)dt = \gamma.$$

III-4-c Montrer que la fonction $t\mapsto\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que son intégrale sur cet intervalle est gale γ.

III-4-d En déduire

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt = -\gamma.$$

III-5-a Démontrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,n]$: $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$.

III-5-b Montrer pour $x>0$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\int_0^n(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \Gamma(x).$$

III-5-c En déduire pour $x>0$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\mapsto\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

III-6 Montrer pour $x>0$ la convergence de $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{n}-\ln(1+\frac{x}{n})\right)$ et la relation

$$\ln\Gamma(x) = -\gamma x - \ln x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln(1+\frac{x}{n})\right).$$

III-7-a Démontrer avec soin la relation pour $x>0$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

III-7-b Retrouver alors la relation $\Gamma'(1) = -\gamma$ puis calculer $\Gamma''(1)$.

III-8 Etablir pour x dans $]0, 1[$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n.$$

3 Problème 3 : CCP 2008, MP

AUTOUR DE LA FONCTION zêta ALTERNÉE DE RIEMANN

3.1 Objectifs :

On note F la fonction zêta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zêta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie III. qui utilise des résultats de la partie I., les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

3.2 Généralités

1 Déterminer l'ensemble de définition de F.

2 On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ définies sur $[0, 1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t)\, dt$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3 Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4 Dérivabilité de F

a Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

b Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

5 Lien avec ζ

Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

3.3 Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.

Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6 Étude de la convergence

a Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

b Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire, pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.

7 Cas où $x = 1$

On suppose, dans cette question 7., que $x = 1$.

a Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(n-X)}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

b Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.

c En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.

4 Exercice : e3a 2009, MP

On considère trois réels α, β et γ non nuls et la quadrique (Σ) dont une équation est :

$$\alpha^2 (x+y+z)^2 + \beta^2 (-x+y)^2 + \gamma^2 (2y+z)^2 = 1$$

dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un espace affine de dimension trois.

1) **a)** Montrer que les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+y+z=0$ et $-x+y=0$ sont orthogonaux.

b) On note $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les deux vecteurs unitaires, d'abscisses positives, normaux respectivement aux plans (P) et (Q). Déterminer les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ ainsi que le vecteur $\vec{K}$ tel que le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ soit orthonormé direct.

c) Déterminer une équation de la quadrique (Σ) dans le repère $\mathcal{R}'$.
On notera X, Y et Z les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}'$.

d) Que peut-on dire de la nature de la quadrique (Σ) ?

2) On note $(\mathcal{E})$ la conique obtenue comme intersection de la quadrique (Σ) avec le plan d'équation $Z = 0$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

Réduire l'équation de la conique $(\mathcal{E})$. En déduire qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ tel que l'équation dans le repère $\mathcal{R}''$ de la quadrique (Σ) soit de la forme :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$$

avec $0 < a < b$. Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}''$ sont notées X', Y' et Z'.

3) Soit k un réel quelconque ; on appelle (P_k) le plan dont une équation dans le repère $\mathcal{R}''$ est :

$$\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

a) En considérant l'expression :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)$$

montrer que l'intersection (C_k) du plan (P_k) et de la quadrique (Σ) est l'intersection du plan (P_k) avec une sphère (S_k) dont on précisera le centre Ω_k et le rayon R_k.

b) Montrer que l'ensemble (C_k) est un cercle dont on précisera le rayon.

c) Que peut-on dire du rayon du cercle (C_k) ? Pouvait-on le prévoir ?

Bonne Chance