Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé n°5

Coniques-quadriques
Séries numériques-intégration
Suites et séries de fonctions

MP-CPGE Rabat

Samedi 26 février 2011

Durée : 4 heures

Blague du jour

Pour le retour, les 5 commerciaux achètent UN seul billet. Quant aux ingénieurs, ils n'achètent AUCUN billet. Les 5 commerciaux vont s'enfermer dans les toilettes juste avant que le contrôleur n'arrive. Les ingénieurs passent discrètement â côté, frappent à la porte et demandent " Votre billet, s'il vous plaît !" et se réfugient dans les toilettes suivantes..... La morale de l'histoire : les commerciaux essayent toujours d'appliquer les techniques des ingénieurs sans jamais vraiment les comprendre.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Matemático alemán que se suele citar como el «padre del análisis moderno». Además de sus prolíficas investigaciones cabe señalar que fue profesor de cátedra en la Universidad de Berlín en la cual tuvo entre sus discípulos a Georg Cantor, Ferdinand Georg Frobenius, Wilhelm Killing, Leo Königsberger, Carl Runge y Sofia Kovalévskaya.
Weierstrass dio las definiciones actuales de continuidad, límite y derivada de una función, que siguen vigentes hoy en día. Esto le permitió demostrar un conjunto de teoremas que estaban entonces sin demostrar como el teorema del valor medio, el teorema de Bolzano-Weierstrass y el teorema de Heine-Borel. También realizó aportes en convergencia de series, en teoría de funciones periódicas, funciones elípticas, convergencia de productos infinitos, cálculo de variaciones, análisis complejo, etc.

Mathématicien du jour

1 Corrigé Problème 1 : CCP 2009, PSI (Pr Devulder)

1.1 Etude de la fonction φ.

1.1. $d \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall t,\ d'(t) = 1 - \sin(t) \geq 0$. d est donc croissante sur $\mathbb{R}$. La croissance est même stricte car d' ne s'annule que sur $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. d réalise ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image $d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On remarque que

$$\forall t \geq 0,\ d(t) \geq d(0) \geq 0$$

En particulier (quand on divise par $t > 0$ on ne change pas le sens des inégalités)

$$\forall t > 0,\ \frac{1 - \cos(t)}{t} \leq 1$$

et bien sûr $\dfrac{1-\cos(t)}{t} \geq 0$ provient (pour $t > 0$) de la positivité des numérateur et dénominateur.

1.2. δ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t,\ \delta'(t) = t - \sin(t) \ \text{ et } \ \delta''(t) = 1 - \cos(t)$$

En particulier δ'' est positive, δ' croît et est positive sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall t \geq 0,\ \delta(t) \geq \delta(0) \geq 0$$

On conclut comme plus haut que

$$\forall t > 0,\ 0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}$$

2. $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$. Au voisinage de 0^+, la fonction est bornée (on vient de le voir ; on montrerait aisément que la fonction est prolongeable par continuité par la valeur $1/2$) et donc intégrable. Au voisinage de $+\infty$, elle est $O(1/t^2)$ et donc aussi intégrable. Elle est finalement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

Si $x \geq 0$, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dominée par $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ dont on vient de voir l'intégrabilité. Par comparaison, elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(x)$ existe a fortiori.

3.1. On a

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}(e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t})\ dt$$

Si $x_1 \leq x_2$, la fonction intégrée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$. φ est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme elle est minorée (par 0) elle admet une limite finie en $+\infty$ (théorème de limite monotone).

3.2. D'après **1.2** on a (en vérifiant que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0,\ 0 \leq \varphi(x) \leq \beta \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt = \frac{\beta}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$$

4.1. Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- $\forall x \geq 0,\ \forall t > 0,\ \left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}\right| \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4.2. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$
- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall a > 0,\ \forall x \geq a,\ \left|-\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}\right| \leq \alpha e^{-at}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a > 0$).

φ est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}\ dt$$

4.3. D'après **1.1** on a (en vérifiant que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0,\ 0 \leq -\varphi'(x) \leq \alpha \int_0^{+\infty} e^{-xt}\ dt = \frac{\alpha}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi'(x) = 0$$

4.4. Il s'agit à nouveau d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (conséquence du théorème utilisé en **4.2**)
- $\forall t > 0,\ x \mapsto -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto (1-\cos(t))e^{-xt}$
- $\forall x > 0,\ t \mapsto (1-\cos(t))e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall a > 0,\ \forall x \geq a,\ \left|(1-\cos(t))e^{-xt}\right| \leq 2e^{-at}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a > 0$).

φ est ainsi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))e^{-xt}\,dt$$

4.5. On a $1-\cos(t) = \mathrm{Re}(1-e^{it})$ et donc (par linéarité du passage à l'intégrale)

$$\begin{aligned}\forall a > 0, \int_0^a (1-\cos(t))e^{-xt}\,dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^a (e^{-xt}-e^{t(i-x)})\right)\\ &= -\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-xt}}{x}+\frac{e^{t(i-x)}}{i-x}\right]_{t=0}^{t=a}\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers $+\infty$ pour $x > 0$ fixé, on obtient

$$\forall x > 0,\ \varphi''(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{i-x}\right) = \frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$$

4.6. Il existe donc une constante c telle que

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c = 0$ et donc

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

On remarque que

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi'(x) = -\infty$$

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, un corollaire des accroissements finis indique que φ n'est pas dérivable en 0 mais que sa courbe présente en 0 une demi-tangente verticale.

5.1. On a

$$x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = -x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

5.2. Une intégration par parties donne

$$\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = x\ln(1+x^2)-2(x-\arctan(x))$$

et ceci représente une primitive de la fonction continue $t \mapsto \ln(1+t^2)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par théorème fondamental.

5.3. On en déduit, avec l'expression de φ', l'existennce d'une constante c telle que

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ \varphi(x) &= x\ln(x) - x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+x-\arctan(x)+c\\ &= \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\arctan(x)+c\end{aligned}$$

Avec **5.1** et **3.2** et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c = \pi/2$ et donc

$$\forall x > 0,\ \varphi(x) = \frac{\pi}{2}-\arctan(x)$$

5.4. φ étant continue en 0, on obtient

$$\varphi(0) = \lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$$

1.2 Etude de l'existence de J_m.

1. $t \mapsto \dfrac{\sin^m(t)}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et équivaut à t^{m-1} au voisinage de 0. Pour $m \geq 1$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 et finalement intégrable sur $[0,\pi/2]$ (et a fortiori, son intégrale existe).
2. Une intégration par parties donne

$$\forall 0 < a < b,\ \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$$

L'intégrale du membre de droite ainsi que le terme tout intégré admettent des limites en 0 et $+\infty$. En opérant les passages à la limite $a \to 0$ et $b \to +\infty$, on a donc

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$$

3. $t \mapsto e^{ikt}$ est continue sur $[\pi/2,+\infty[$ et $t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. On peut opérer une intégration par parties pour obtenir

$$\forall k \neq 0,\ \forall a \geq \pi/2,\ \int_{\pi/2}^a \frac{e^{ikt}}{t}\,dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt}\right]_{\pi/2}^a + \int_{\pi/2}^a \frac{e^{ikt}}{ikt^2}\,dt$$

Comme $\left|\dfrac{e^{ikt}}{ikt^2}\right| \leq \dfrac{1}{|k|t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, l'intégrale du membre de droite admet une limite quand $a \to \infty$. De même, le terme "tout intégré" est de limite nulle en $+\infty$. On peut donc faire tendre a vers $+\infty$ pour obtenir l'existence de I_k.
Si $k = 0$ alors la fonction à considérer est $t \mapsto 1/t$ et c'est une fonction de Riemann non intégrable au voisinage de 0. Comme elle est positive, son intégrale n'existe pas. Finalement,

$$I_k \text{ existe si et seulement si } k \neq 0$$

4.1. On a

$$\sin^m(t) = \frac{(e^{it}-e^{-it})^m}{(2i)^m} = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k e^{i(m-2k)t}$$

Par linéarité du passage à l'intégrale, on a donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^m(t)}{t}\,dt = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k I_{m-2k}(x)$$

4.2. Si $m = 2p+1$, on obtient

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2^{2p+1}i(-1)^p}\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}(-1)^k I_{2(p-k)+1}(x)$$

$2(p-k)+1$ étant impair est non nul et tous les termes de la somme admettent une limite quand $x \to +\infty$. On peut ainsi passer à la limite aussi dans le membre de gauche ce qui donne l'existence de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$.
Avec la question 1, on a finalement l'existence de J_{2p+1}.

4.3. Pour $m = 2p$, on a cette fois

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2^{2p}(-1)^p}\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k}(-1)^k I_{2(p-k)}(x)$$

Dans le membre de droite, tous les termes admettent une limite quand $x \to +\infty$ sauf celui pour $k = p$ qui tend vers $+\infty$ (en rentrant le facteur dans la somme et puisque $I_0(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$). On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\,dt = +\infty$$

et J_{2p} n'existe pas.

2 Corrigé Problème 2 : CNC 99, MP (Pr Kanber)

Partie I

I.1 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ est une série de Riemann qui est convergente si et seulement si $s>1$ donc

$$D_\zeta =]1,+\infty[$$

I.2.a Soit $a>1, |\frac{1}{n^s}| \leq \frac{1}{n^a}, \forall s \in [a,+\infty[$ et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ est convergente ce qui entraine que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$ donc uniformément convergente sur $[a,+\infty[$

I.2.b Supposons au contraire que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ converge uniformément sur $I=]1,+\infty[$. on a alors :

- $1 \in \bar{I}$
- $\forall n \geq 1, \lim_{s\mapsto 1}\frac{1}{n^s}$ existe et vaut $\frac{1}{n}$

Donc d'après le théorème d'inversion $\lim$ et $\sum$ la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est convergente ce qui est absurde.

Conclusion : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ ne converge pas uniformément sur $I=]1,+\infty[$

I.3.a Soit $a>1$

- $\forall n \geq 1$ la fonction $s \longmapsto \frac{1}{n^s}$ est continue sur $[a,+\infty[$.
- $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ est uniformément convergente sur $[a,+\infty[$

Donc d'après le théorème de continuité sous le signe $\sum$ ζ est continue sur $[a,+\infty[$ ceci $\forall a>1$, donc continue sur I

I.3.b

- $\lim_{s\mapsto+\infty}(\zeta(s)?$
  - $\star \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ est uniformément convergente sur $[2,+\infty[$
  - $\star + \infty \in \overline{[2,+\infty[}$
  - $\star\forall n \geq 1$ la fonction $s \longmapsto \frac{1}{n^s}$ admet une limite en $+\infty$ qui vaut 0 si $n\neq 1$ et 1 sinon.

  Donc d'après le théorème d'inversion $\lim$ et $\sum$,

$$\lim_{s\mapsto+\infty}\zeta(s)=1$$

- $\lim_{s\mapsto 1}(\zeta(s)?$ il est clair que ζ est décroissante ($s<s' \Longrightarrow \frac{1}{n^s}<\frac{1}{n^{s'}}$). Donc ζ admet une limite en 1. Supposons que $\lim_{s\mapsto 1}(\zeta(s)=M<+\infty$

  on a alors $\zeta(x)\leq M, \forall x\in I$, par suite $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}\leq M$, on fait $x\mapsto+\infty$ dans la dernière inégalité on obtient : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\leq M$ ce qui est impossible car la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

  Conclusion :

$$\lim_{s\mapsto 1}\zeta(s)=+\infty$$

I.3.c Soit $s \in I$ fixé. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x^s}$ qui est bien évidemment positive, décroissante et tend vers 0 quand $n \mapsto +\infty$. Donc d'après le théorème de comparaison série et intégrale on a :

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx \leq R_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

mais $\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^{-s+1}}{s-1} + \frac{2}{2^s(s-1)} = \frac{2}{2^s(s-1)}$ et $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{s-1}$ donc :

$$\frac{2}{2^s(s-1)} \leq \zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1}$$

soit encore

$$\frac{2}{2^s(s-1)} + 1 \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$$

mais $\frac{1}{2^s(s-1)} + 1 \sim \frac{1}{s-1}$ au voisinage de 1 et aussi $\frac{1}{s-1} + 1 \sim \frac{1}{s-1}$ au voisinage de 1, on en déduit alors que

$$\zeta(s) \sim_{s\mapsto 1} \frac{1}{s-1}$$

I.4.a Soit $a > 1$ fixé, posons $I_a = [a, +\infty[$ et u_n la fonction définie sur I_a par $u_n(s) = \frac{1}{n^s}$

- $\forall n, u_n$ est de classe C^1 sur I_a et $\forall s \in I_a, u_n'(s) = -\frac{\ln(n)}{n^s}$
- $|u_n'(s)| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}, \forall x \in I_a$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ est convergente (car pour $1 < b < a$, $\frac{\ln(n)}{n^a} = o(\frac{1}{n^b})$ quand $n \mapsto +\infty$).

  La série $\sum_{n\geq 1} u_n'$ est alors uniformément convergente sur I_a (car normalement convergente).

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$.ζ est C^1 sur I est on a :

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(n)}{n^s}, \forall s \in I$$

I.4.b Montrons par récurrence sur p que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \zeta \in C^p(I), \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-)^p \ln^p(n)}{n^s}, \forall s \in I$$

- La propriété est déjà démontrée pour $p = 1$.
- soit $p \geq 1$ supposons la propriété vraie à l'ordre p.

  Soit $a > 1$ fixé, posons $I_a = [a, +\infty[$ et $u_n^{(p)}$ la fonction définie sur I_a par $u_n^{(p)}(s) = \frac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^s}$

  - i) $\forall n, u_n^{(p)}$ est de classe C^1 sur I_a et $\forall s \in I_a, u_n^{(p)\prime}(s) = \frac{(-1)^{p+1} \ln^{p+1}(n)}{n^s}$
  - ii) $|u_n^{(p)\prime}(s)| \leq \frac{\ln^{p+1}(n)}{n^a}, \forall x \in I_a$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^{p+1}(n)}{n^a}$ est convergente (car pour $1 < b < a$, $\frac{\ln^{p+1}(n)}{n^a} = o(\frac{1}{n^b})$ quand $n \mapsto +\infty$).

    La série $\sum_{n\geq 1} (u_n^{(p)})'$ est donc uniformément convergente sur I_a (car normalement convergente).

  Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, ζ est C^{p+1} sur I et :

$$\zeta^{(p+1)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-)^{p+1} \ln^{p+1}(n)}{n^s}, \forall s \in I$$

Conclusion $\zeta \in C^\infty(I), \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall s \in I, \quad \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-)^p \ln^p(n)}{n^s}$

I.5.a On a

$$\forall s > 1, 2^s(\zeta(s) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^s}{n^s} = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} (\frac{2}{n})^s$$

– $\forall n > 3, \quad \lim_{s \mapsto +\infty} (\frac{2}{n})^s = 0$

– $\forall n > 3, \forall s > 2 \quad (\frac{2}{n})^s \leq \frac{2}{n})^2$ et la série $\sum_{n\geq 3} (\frac{2}{n})^2$ est convergente

D'après le théorème d'interversion limite et $\sum$ on a :

$$\lim_{s \mapsto +\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^s}{n^s} = 0$$

et donc :

$$\zeta(s) - 1 \sim_{s \mapsto +\infty} = 2^{-s}$$

On a montré que $\zeta(k) - 1 \sim_{k \mapsto +\infty} 2^{-k}$, la série $\sum_{n\geq 2} 2^{-k}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc convergente par conséquent la série $\sum_{n\geq 2} (\zeta(k) - 1)$ est convergente.

I.5.b $\sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$. Considérons la suite double $(\frac{1}{n^k})_{n,k\geq 2}$. On a

– $\forall n \geq 2, \forall k \geq 2, \frac{1}{n^k} \geq 0$

– $\forall n \geq 2$, la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{n^k}$ est une série géométrique convergente. En outre

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n(n-1)}$$

– La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente. En outre

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1$$

Donc d'après un critère de sommabilité, La famille $(\frac{1}{n^k})_{n,k\geq 2}$ est sommable et donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

I.6.a Il est clair que $P_n(x) = Im((\sqrt{x} + i)^{2n+1})$. Mais $(\sqrt{x} + i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k i^k (\sqrt{x}^{2n+1-k}$, Donc

$$Im((\sqrt{x} + i)^{2n+1}) = \sum_{0\leq 2p+1 \leq 2n+1} C_{2n+1}^{2p+1} (-1)^p (\sqrt{x}^{2n+1-(2p+1)} = \sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p+1} (-1)^p x^{n-p}$$

En conséquence P_n est polynômiale, de degré n, de coefficient dominant $C_{2n+1}^1 = 2n + 1$, de terme constant $(-1)^n$.

I.6.b soit $x \in]0, +\infty[$ tel que $P_n(x) = 0$. donc $(\sqrt{x} + i)^{2n+1} - (\sqrt{x} - i)^{2n+1} = 0$ par suite $(\frac{\sqrt{x} + i)}{(\sqrt{x} - i)})^{2n+1} =$

1, par conséquent $\dfrac{\sqrt{x}+i)}{(\sqrt{x}-i)} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ avec k entier tel que $0 \leq k \leq 2n$. Donc $\dfrac{(\sqrt{x}+i)^2}{(x+1)} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$, soit $\dfrac{x+2i\sqrt{x}-1}{(x+1)} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ par suite $\dfrac{x-1}{x+1} = Re(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}) = \cos(\dfrac{2k\pi}{2n+1})$ soit encore $(1-\cos(\dfrac{2k\pi}{2n+1})x = 1 + \cos(\dfrac{2k\pi}{2n+1})$ c'est à dire $2\sin^2(\dfrac{k\pi}{2n+1}) = 2\cos^2(\dfrac{k\pi}{2n+1})$ et donc

$$x = \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})$$

Réciproquement :
soient $x_k = \cot^2(\dfrac{k\pi}{2n+1})$ avec $1 \leq k \leq n$. On a

$$P_n(x_k) = (\sqrt{x}_k + i)^{2n+1} - (\sqrt{x}_k - i)^{2n+1}) = (\cot(\frac{k\pi}{2n+1}) + i)^{2n+1} - (\cot(\frac{k\pi}{2n+1}) - i)^{2n+1})$$

soit alors

$$P_n(x_k) = \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1}))^{2n+1}}(\cos(\frac{k\pi}{2n+1}) + i\sin(\frac{k\pi}{2n+1}))^{2n+1} - (\cos(\frac{k\pi}{2n+1}) - i\sin(\frac{k\pi}{2n+1}))^{2n+1}$$

et enfin

$$P_n(x_k) = \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^{2n+1}}[e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}]^{2n+1} - [e^{\frac{-ik\pi}{2n+1}}]^{2n+1}] = 0$$

Conclusion : Les racines de $P_n, \in]0, +\infty[$ sont les

$$x_k = \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}), 1 \leq k \leq n$$

I.6.c Les racines de P_n sont 0 et les $x_k = \cot^2(\dfrac{k\pi}{2n+1}), 1 \leq k \leq n$, donc d'après les relations entres coefficients et racines d'un polynôme $\displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, En désignant par $a_i, 0 \leq i \leq n$ les coefficients de P_n.
Mais $a_n = 2n+1, a_{n-1} = -C^3_{2n+1} = -\dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1}{6}$.
Donc

$$\sum_{1\leq k\leq n} \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

On a $\displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} = \sum_{1\leq k\leq n} 1 + \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ (car $\forall x\ 1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$). Donc

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

I.6.d Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(t) = t\cos t - \sin t$.
f est C^1 sur $[0, \pi[$ et

$$\forall t \in [0, \pi[, f'(t) = -t\sin t \leq 0$$

donc f est décroissante sur $[0, \pi[$. Mais $f(0) = 0$ donc $\forall t \in [0, \pi[f(t) \leq 0$ par suite

$$\forall t \in]0, \pi[, \cot t \leq \frac{1}{t}$$

D'autre part la fonction sin est concave sur $]0, \pi[$ donc

$$\forall t \in]0, \pi[\ \sin t \leq t$$

Conclusion :

$$\forall t \in]0, \pi[\ \cot t \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sin t}$$

I.6.e Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a $\forall k, 1 \leq k \leq n, \dfrac{k\pi}{2n+1} \in]0,\pi[$
D'après la question précédente

$$\forall k, 1 \leq k \leq n, \cot(\frac{k\pi}{2n+1}) \leq \frac{2n+1}{k\pi} \leq \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})}$$

, et donc

$$\forall k, 1 \leq k \leq n, \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$$

par sommation on obtient

$$\sum_{1\leq k\leq n} \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) \leq \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$$

En remplaçant par les expression trouvées on obtient :

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{3}{n(2n-1)} \leq \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{3}{2n(n+1)}$$

Mais $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \dfrac{3}{n(2n-1)} = \dfrac{\pi^2}{6}$ et aussi $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \dfrac{3}{2n(n+1)} = \dfrac{\pi^2}{6}$
Conclusion :

$$\zeta(2) = \lim_{n\mapsto+\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3 Corrigé Problème 3 : CCP 2008, MP (Pr Patte)

3.1 I. Généralités

1 Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge ; si $x \leq 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

2 Comme $|-t| < 1$, la série géométrique $\sum (-t)^n$ converge et sa somme vaut $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \dfrac{1}{1-(-t)} = \dfrac{1}{1+t}$; donc la suite (g_n) converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sur $[0,1[$.

- La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur $[0,1[$;
- la fonction g et les fonctions g_n, $n \in \mathbb{N}$ sont continues (par morceaux) ;
- condition de domination : $\forall t \in [0,1[,\ |g_n(t)| = \left|\dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| = \dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \leq \dfrac{2}{1+t} \overset{\text{def}}{=} \phi(t)$;
  la fonction ϕ est indépendante de n, continue (même sur $[0,1]$) et intégrable sur $[0,1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 g_n\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 g$.

Or, $\displaystyle\int_0^1 g_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$; donc $F(1) = \displaystyle\int_0^1 g = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln 2$.

3 $\forall n \geq 1$, $\forall x \geq 2$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est indépendante de n et convergente, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[2, +\infty[$. Comme, pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que, pour $n = 1$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$, le théorème de passage à la limite terme à terme permet d'affirmer que $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$.

4 Dérivabilité de F

a) Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $h_x'(t) = \dfrac{t^{x-1}(1 - x\ln t)}{t^{2x}}$.
Donc h_x' est négative sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$ et positive sur $]0, e^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et croissante sur $]0, e^{1/x}]$.
On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $\mathrm{E}\left(e^{1/x}\right) + 1$.

b) $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1} e^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x) = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^x}$.
Soit $a > 0$. On pose $N_a = \mathrm{E}\left(e^{1/a}\right) + 1$. Pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum_{n\geq N_a} f_n'(x)$ converge et, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\sup_{x\geq a} |\rho_n(x)| \leq \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$;
- la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

5 Lien avec ζ

Pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$. On en déduit l'égalité : $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.
Comme $2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

3.2 II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6 Étude de la convergence

a) Lorsque $x > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; donc la série produit de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même converge absolument et sa somme vaut : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)^2 = (F(x))^2$.

b) Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \frac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes, $|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x} \geq (n-1)\frac{1}{[(n/2)^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$.

Pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

7 Cas où $x = 1$

a) $\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2}\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = (-1)^{n-2}\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}\right) \\ &= 2(-1)^{n-2}\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2}\frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

b) Monotonie

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n}\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante.

c) "Classiquement", $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 0 en décroissant et la série alternée $\sum_{n\geq 2} c_n(1)$ converge.

4 Corrigé Exercice : e3a 2009, MP (Pr Gayout)

1) a) Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}\,(1, 1, 1)$ et un vecteur normal au plan (Q) est $\vec{m}\,(-1, 1, 0)$.
On a : $\vec{n}\,.\,\vec{m} = 0$. $\boxed{\text{Donc les plans (P) et (Q) sont orthogonaux}}$.

b) On prend $\boxed{\vec{I}\,(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}),\ \vec{J}\,(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \text{ et } \vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}, \text{ soit } \vec{K}\,(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})}$.

c) D'après les formules de changement de bases, en notant P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{P}\times\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{X} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Y} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{Z} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{X} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Y} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{Z} \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{X} - 2\times\frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{Z} \end{cases}$ et on a aussi :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{P}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} \mathrm{X} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+y+z) \\ \mathrm{Y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ \mathrm{Z} = \frac{\sqrt{6}}{6}(x+y-2z) \end{cases}.$$

Donc $(x + y + z)^2 = 3\,\mathrm{X}^2$, $(-x + y)^2 = 2\,\mathrm{Y}^2$ et $(2\,y + z)^2 = (\sqrt{3}\,\mathrm{X} - \sqrt{2}\,\mathrm{Y})^2$.
$\boxed{\text{Une équation de } (\Sigma) \text{ dans le repère } \mathcal{R}' \text{ est donc : } 3\,\alpha^2\,\mathrm{X}^2 + 2\,\beta^2\,\mathrm{Y}^2 + \gamma^2(\sqrt{3}\,\mathrm{X} - \sqrt{2}\,\mathrm{Y})^2 = 1}$.

d) $\boxed{\text{On en déduit que } (\Sigma) \text{ est un cylindre d'axe dirigé par le vecteur } \vec{K}}$.

2) $(\mathcal{E})$ a pour équation : $3\,\alpha^2\,\mathrm{X}^2 + 2\,\beta^2\,\mathrm{Y}^2 + \gamma^2(\sqrt{3}\,\mathrm{X} - \sqrt{2}\,\mathrm{Y})^2 = 1$, soit
$3(\alpha^2 + \gamma^2)\,\mathrm{X}^2 - 2\,\gamma^2\,\sqrt{6}\,\mathrm{XY} + 2(\beta^2 + \gamma^2)\,\mathrm{Y}^2 = 1$.
La matrice associée à la forme quadratique $q(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 3(\alpha^2 + \gamma^2)\,\mathrm{X}^2 - 2\,\gamma^2\,\sqrt{6}\,\mathrm{XY} + 2(\beta^2 + \gamma^2)\,\mathrm{Y}^2$
est : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3(\alpha^2+\gamma^2) & -\sqrt{6}\gamma^2 \\ -\sqrt{6}\gamma^2 & 2(\beta^2+\gamma^2) \end{pmatrix}$.
Par le théorème spectral, on sait que M admet deux valeurs propres réelles, que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont orthogonaux et que M est diagonalisable dans une base orthonormale $(\vec{I}', \vec{J}')$ constituée de vecteurs propres.

Après calculs, on trouve comme valeurs propres : $a' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 + \sqrt{\theta})$

et $b' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 - \sqrt{\theta})$ où $\theta = 9\alpha^4 + 4\beta^4 + 25\gamma^4 - 12\alpha^2\beta^2 - 4\beta^2\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma^2$.

Un vecteur propre associé à a' est $\vec{U}(\sqrt{6}\gamma^2, 3(\alpha^2+\gamma^2) - a')$ et un vecteur propre associé à b' est $\vec{V}(\sqrt{6}\gamma^2, 3(\alpha^2+\gamma^2) - b')$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.

On pose : $\vec{I}' = \frac{1}{\|\vec{U}\|}\vec{U}$ et $\vec{J}' = \frac{1}{\|\vec{V}\|}\vec{V}$. On sait de plus que : $a' + b' = \mathrm{Tr}(M) = 3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 > 0$

et que $a'b' = \det(M) = 6(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) > 0$. Donc on a : $0 < b' < a'$.

Dans la repère orthonormal $(O, \vec{I}', \vec{J}')$, $(\mathcal{E})$ a pour équation réduite : $a'X'^2 + b'Y'^2 = 1$.

$\boxed{(\mathcal{E}) \text{ est donc une ellipse et } (\Sigma) \text{ un cylindre elliptique}}$.

On pose $\vec{K}' = \vec{K}$, $a = \frac{1}{\sqrt{a'}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{b'}}$. On a : $0 < a < b$ et l'équation de (Σ) dans le repère orthonormal $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ est alors : $\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$.

3) a) On a :

$$(*) \quad \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}X'^2 - \frac{1}{b^2}Z'^2 = \left(\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right).$$

Soit $M \in (C_k)$; alors ses coordonnées (X', Y', Z') dans le repère $\mathcal{R}''$ vérifient :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

Donc, en remplaçant dans (*), on obtient (**) : $1 - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = k\left(\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right)$, soit

$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + \frac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{a}X' + kbZ' = b^2$, soit $\boxed{\left(X' + \frac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{2a}\right)^2 + Y'^2 + \left(Z' + \frac{kb}{2}\right)^2 = \frac{b^2(k^2b^2+4a^2)}{4a^2}}$.

Donc M appartient aussi à la sphère (S_k) de centre Ω_k de coordonnées $\left(-\frac{kb\sqrt{b^2-a^2}}{2a}, 0, -\frac{kb}{2}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}''$ et de rayon $R_k = \frac{b\sqrt{k^2b^2+4a^2}}{2a}$.

Réciproquement, si $M \in (S_k) \cap (P_k)$, on a la relation (**) et $\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k$, d'où :

$1 - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \left(\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right) = \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)$, donc

$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$. Donc $M \in (\Sigma)$. D'où l'égalité : $\boxed{(C_k) = (P_k) \cap (\Sigma) = (P_k) \cap (S_k)}$.

b) En tant qu'intersection d'un plan et d'une sphère, (C_k) est soit vide, soit un point, soit un cercle.
C'est un cercle ssi la distance d de Ω_k au plan (P_k) est strictement inférieure à R_k.
Dans ce cas, d'après le théorème de Pythagore, le rayon de (C_k), noté r_k,est égal à : $\sqrt{R_k^2 - d^2}$.

.

On a : $R_k = \dfrac{b\sqrt{k^2b^2+4a^2}}{2a}$ et $d = d(\Omega_k, (P_k)) = \dfrac{\left|-\dfrac{k(b^2-a^2)}{2a^2}+\dfrac{k}{2}-k\right|}{\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}+\dfrac{1}{b^2}}} = \dfrac{kb^2}{2a}$.

D'où $R_k - d = \dfrac{b}{2a}\left(\sqrt{k^2b^2+4a^2}-kb\right) > 0$ car $a > 0$. $\boxed{\text{Donc } (C_k) \text{ est un cercle de rayon } r_k = b}$.

c) $\boxed{\text{Le rayon du cercle } (C_k) \text{ est égal à la demi-longueur du grand axe de l'ellipse } (\mathcal{E})}$.

On pouvait le prévoir puisque l'ellipse ($\mathcal{E}$) est l'image du cercle (C_k) par la projection orthogonale sur le plan d'équation Z' = 0.
Or, (C_k) est inclus dans le plan (P_k) dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{J'}$ aussi vecteur directeur du plan Z' = 0. Donc un diamètre de (C_k) dirigé selon $\vec{J'}$ a sa longueur inchangée par la projection orthogonale considérée.

Bonne Chance