CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشرَح لِي صَدرِي وَ يَسِّر لِي أَمرِي وَ
أَحلُل عُقدَةً مِن لِسَانِي يَفقَهُوا قَولِي

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيمِ
سورة طه

Contrôle 2 (2009-2010): *Espaces vectoriels normés*

Mercredi 28 Octobre 2009

Durée : 2 heures

Source : Concours E3A, 2006, MP.

Blague du jour
Il ne faut jamais traiter quelqu'un de compact, c'est une insulte. Parce qu'un compact est un fermé borné !

Mathématicen du jour — *Bolzano*
Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) était un mathématicien bohémien-allemande. Il devint prêtre et enseigna alors les sciences de la religion. Ses travaux portèrent essentiellement sur les fonctions, la logique et la théorie des nombres. Il est considéré comme l'un des principaux contributeurs à la logique telle qu'elle est aujourd'hui établie.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante: 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.
$\mathcal{C}^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|.$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$L^1(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I) \ ; \ \int_I |f| \ \text{existe} \right\} \ \text{et} \ \ \forall f \in L^1(I), \|f\|_1 = \int_I |f| \,,$$

$$L^2(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I) \ ; \ \int_I |f|^2 \ \text{existe} \right\} \ \text{et} \ \ \forall f \in L^2(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}.$$

Partie I

1. Soit f dans $\mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation :
$$y' + cy = f$$
admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, dérivable sur I, et qui vérifie :
$$\varphi(f)(0) = 0.$$
Démontrer :
$$\forall x \in I, \ \varphi(f)(x) = \mathrm{e}^{-cx} \int_0^x \mathrm{e}^{ct} f(t) \ \mathrm{d}t.$$
2. Exprimer $\varphi'(f)$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose, dans cette partie, que l'intervalle I est un segment $[a, b]$ avec $a \le 0 < b$.

1. Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \le M_1 \|f\|_2 \le M_2 \|f\|_\infty \,.$$
2. Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \le M_0 \|f\|_\infty \,.$$
3. Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \le A \|f\|_1 \,.$$
4. Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :
$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \le B \|f\|_2 \,.$$
En déduire :
$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \le K \|f\|_2 \,.$$
5. L'application φ de $\mathcal{C}^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue
   (a) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$?
   (b) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|.\|_1$?
   (c) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|.\|_2$?

Partie III

.
Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

1. Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.
2. Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I. Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.
3. Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I. Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.
4. Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $L^1(I)$ et calculer :
$$|||\varphi|||_1 = \sup_{\substack{f \in L^1(I) \\ \|f\|_1 \leq 1}} \|\varphi(f)\|_1.$$
5. On pose $g = \varphi(f)$. On a donc $f = g' + cg$.
Démontrer :
$$\forall X > 0,\ \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^X f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$
En déduire que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ et calculer :
$$|||\varphi|||_2 = \sup_{\substack{f \in L^2(I) \\ \|f\|_2 \leq 1}} \|\varphi(f)\|_2.$$

Partie IV

I désigne maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $H(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' soient de carrés intégrables sur I :

$$H(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(I),\ \int_I |f|^2 \text{ et } \int_I |f'|^2 \text{ existent} \right\}.$$

1. (a) Démontrer que, si f et g sont dans $H(I)$, alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I.
   (b) Démontrer que l'application :
   $$\phi : \begin{array}{ccc} H(I)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \phi(f,g) = \displaystyle\int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t + \int_I f'(t)g'(t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$
   définit un produit scalaire sur $H(I)$.
   (c) En déduire que l'application $\|.\|_H$ définie par :
   $$\forall f \in H(I),\ \|f\|_H = \sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t + \int_I f'(t)^2\ \mathrm{d}t}$$
   est une norme sur $H(I)$.
2. On suppose, dans cette question, que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$.
On pose :
$$K = \{f \in H(I),\ f(0) = 0\}.$$
   (a) Démontrer que, pour tout f dans $L^2(I)$, $\varphi(f)'$ est dans $L^2(I)$, $\varphi(f)$ est dans K.
   Démontrer que :
   $$\exists A > 0,\ \forall f \in L^2(I),\ \|\varphi(f)\|_H \leq A\,\|f\|_2.$$
   (b) Démontrer que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K.
   (c) Démontrer que φ est continue de $(L^2(I), \|.\|_2)$ dans $(K, \|.\|_H)$.
   (d) Démontrer que φ^{-1} est continue de $(K, \|.\|_H)$ dans $(L^2(I), \|.\|_2)$.

Fin
Bonne chance