CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle: *Espaces vectoriels normés*

5 novembre 2009

Blague du jour

Théorème : **L'injectivité implique la bijectivité.**
Preuve **: Si f est injective tout élément possède au plus un antécédent ; mais qui peut le plus peut le moins, donc tout élément possède au moins un antécédent, donc f est surjective puis bijective.**

Mathématicen du jour ***Weierstrass***
Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, (1815-1897) était un mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley. Il fut immobile les trois dernières années de sa vie et s'étint à la suite d'une pneumonie.
Karl Weierstrass est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Il consolida des travaux de Cauchy sur les nombres irrationnels et leur amena une nouvelle compréhension. Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable.

---

e3a
Épreuve de Mathématiques A MP

Corrigé rédigé par Philippe Patte

Partie I

1) **Le problème de Cauchy** $\begin{cases} y' + cy = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **, associé à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 résolue en y', à coefficients continus sur I, admet une solution unique sur I qu'on peut calculer, par exemple, par la méthode de variation de la constante.**

   On peut aussi remarquer que $g : x \mapsto \varphi(f)(x).\mathrm{e}^{cx}$ est dérivable sur I et que $\forall x \in I,\ g'(x) = \mathrm{e}^{cx}(c\varphi(f)(x) + \varphi(f)'(x) = \mathrm{e}^{cx} f(x)$.

   Comme $g(0) = 0$: $\forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{ct} f(t)\ \mathrm{d}t$; ce qui montre la formule annoncée.

2) **$\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ est continue, donc $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.**
   La linéarité découle de la formule du I1 et de la linéarité de l'intégrale. On peut aussi la démontrer à l'aide du principe de superposition.

Partie II

1) **Vu en cours :** $\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$ **et** $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$.

2) **Soit** $x \in I$.

$$|\varphi(f)(x)| \leq \mathrm{e}^{-cx}\int_{[0,x]} \mathrm{e}^{ct}\,|f(t)|\ \mathbf{d}t \leq \mathrm{e}^{-cx}\left|\int_0^x \mathrm{e}^{ct}\ \mathbf{d}t\right| \|f\|_\infty = \frac{1}{c}\left|1-\mathrm{e}^{-cx}\right| \|f\|_\infty \leq \frac{\max(\left|1-\mathrm{e}^{-ca}\right|, \left|1-\mathrm{e}^{-cb}\right|}{c}\|f\|_\infty.$$

Donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \dfrac{\max(\left|1-\mathrm{e}^{-ca}\right|, \left|1-\mathrm{e}^{-cb}\right|}{c}\|f\|_\infty$.

3) $|\varphi(f)(x)| \leq \mathrm{e}^{-cx}\displaystyle\int_{[0,x]} \mathrm{e}^{ct}\,|f(t)|\ \mathbf{d}t \leq \mathrm{e}^{-ca}\int_{[0,x]} \mathrm{e}^{cb}\,|f(t)|\ \mathbf{d}t \leq \mathrm{e}^{c(b-a)}\int_{[a,b]} |f(t)|\ \mathbf{d}t = \mathrm{e}^{c(b-a)}\,\|f\|_1$.

Par intégration, on en déduit que $\|\varphi(f)\|_1 \leq (b-a).\mathrm{e}^{c(b-a)}\,\|f\|_1$.

4) **En combinant les questions II 1 et 4, on obtient** $|\varphi(f)(x)| \leq \sqrt{b-a}\ \mathrm{e}^{c(b-a)}\,\|f\|_2$.
On en déduit que $\|\varphi(f)\|_2 \leq \sqrt{b-a}.\sqrt{b-a}\ \mathrm{e}^{c(b-a)}\,\|f\|_2$.

5) **Comme φ est une application linéaire, les inégalités établies aux questions 2, 3 et 4 assurent que l'application φ de $\mathcal{C}^0([a,b])$ dans lui-même est continue lorsque $\mathcal{C}^0([a,b])$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$, de la norme $\|.\|_1$ ou de la norme $\|.\|_2$.**

Partie III

1) **On utilise la formule du I 1. Si** $\lambda \neq c$, $\varphi(f_\lambda)(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda x}-\mathrm{e}^{-cx}}{c-\lambda}$ **; sinon,** $\varphi(f_\lambda)(x) = x\,\mathrm{e}^{-cx}$.

2) **Dans tous les cas, les fonctions f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont positives, continues sur $I = [0,+\infty[$ et négligeables au voisinage de $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$, donc intégrables sur I.**

On obtient facilement $\|f_\lambda\|_1 = \dfrac{1}{\lambda}$ **et** $\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \dfrac{1}{c\lambda}$.

3) **Le même raisonnement donne** $\|f_\lambda\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ **et** $\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda c(\lambda+c)}}$.

4) **La restriction de φ à $L^1(I)$, encore notée φ, est linéaire.**
Soit $f \in L^1(I)$. On montre que $\varphi(f)$ (qui est continue) est intégrable en montrant que $\displaystyle\int_0^X |\varphi(f)(x)|\ \mathbf{d}x$ est majorée quand X décrit I.
Le théorème de Fubini sur un domaine triangulaire (donc élémentaire) assure que

$$\int_0^X |\varphi(f)(x)|\ \mathbf{d}x \leq \int_0^X \mathrm{e}^{-cx}\int_0^x \mathrm{e}^{ct}\,|f(t)|\,\mathbf{d}t\,\mathbf{d}x = \int_0^X \left(\int_0^x \mathrm{e}^{c(t-x)}\,|f(t)|\,\mathbf{d}t\right)\mathbf{d}x = \int_0^X \left(\int_t^X \mathrm{e}^{c(t-x)}\,|f(t)|\,\mathbf{d}x\right)\mathbf{d}t$$

Donc $\displaystyle\int_0^X |\varphi(f)(x)|\ \mathbf{d}x \leq \int_0^X \frac{1-\mathrm{e}^{c(t-X)}}{c}\,|f(t)|\,\mathbf{d}t \leq \int_0^X \frac{1}{c}\,|f(t)|\,\mathbf{d}t \leq \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathbf{d}t = \frac{1}{c}\,\|f\|_1$.

On en déduit que $\varphi(f)$ est intégrable sur I et que $\|\varphi(f)\|_1 \leq \dfrac{1}{c}\,\|f\|_1$.

Autrement dit, $\varphi(f)$ est dans $L^1(I)$ et φ est un endomorphisme de $L^1(I)$.

L'inégalité $\|\varphi(f)\|_1 \leq \dfrac{1}{c}\,\|f\|_1$, valable pour tout $f \in L^1(I)$, assure la continuité de l'endomorphisme φ sur $L^1(I)$. De plus, $|||\varphi|||_1 \leq \dfrac{1}{c}$.

Comme $\dfrac{\|\varphi(f_\lambda)\|_1}{\|f_\lambda\|_1} = \dfrac{1}{c}$, $|||\varphi|||_1 = \dfrac{1}{c}$.

5) **En multipliant l'égalité $f = g' + cg$ par g et en intégrant entre 0 et X, on obtient**

$$\forall X > 0,\ \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\ \mathbf{d}t = \int_0^X f(t)g(t)\ \mathbf{d}t.$$

On en déduit que : $c\displaystyle\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_0^X f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^X f(t)^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^X g(t)^2\ \mathrm{d}t}$**.**

Donc $c\sqrt{\displaystyle\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t} \leq \sqrt{\displaystyle\int_0^X f(t)^2\ \mathrm{d}t}$**, que** $\sqrt{\displaystyle\int_0^X g(t)^2\ \mathrm{d}t}$ **soit nul ou non.**

Finalement, si f **est dans** $L^2(I)$**, on a** $\forall X > 0, \sqrt{\displaystyle\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t} \leq \frac{1}{c}\|f\|_2$**. Comme** g^2 **est continue et positive, cette majoration assure l'intégrabilité de** g^2**, donc l'appartenance de** g **à** $L^2(I)$ **:** φ **est un endomorphisme de** $L^2(I)$**.**

On obtient de plus la majoration $\|g\|_2 = \|\varphi(f)\|_2 \leq \frac{1}{c}\|f\|_2$**, qui traduit la continuité de** φ **sur** $L^2(I)$**. On a également** $|||\varphi|||_2 \leq \frac{1}{c}$**.**

Comme $\dfrac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \dfrac{1}{\sqrt{c(c+\lambda)}} \xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} \dfrac{1}{c}$**, on a finalement** $|||\varphi|||_2 = \dfrac{1}{c}$**.**

Partie IV

1)
- **a) Vu en cours : le produit de deux fonctions de carré intégrable sur** I **est intégrable sur** I**.**
- **b) Vérification élémentaire.**
- **c) C'est la norme associée au produit scalaire** ϕ**.**

2) Comme φ **est un endomorphisme continu de** $L^2(I)$**, on peut trouver** β **dans** $\mathbb{R}$ **tel que**

$$\forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq \beta\|f\|_2 .$$

- **a) Soit** f **dans** $L^2(I)$**. Par hypothèse,** $\varphi(f)$ **est dans** $L^2(I)$**, qui est un espace vectoriel, donc** $\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ **est dans** $L^2(I)$**. Donc** $\varphi(f)$ **est dans** $H(I)$**, et vaut 0 en 0, donc est dans** K**.**
  De plus, $\|\varphi(f)'\|_2 \leq \|f\|_2 + c\|\varphi(f)\|_2 \leq \|f\|_2 + c\beta\|f\|_2 = (1+c\beta)\|f\|_2$ **;**
  donc $\|\varphi(f)\|_H^2 = \|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2 \leq \beta^2\|f\|_2^2 + (1+c\beta)^2\|f\|_2^2$**.**
  Finalement, avec $A = \sqrt{\beta^2 + (1+c\beta)^2}$**, qui est indépendant de** f**,** $\|\varphi(f)\|_H \leq A\|f\|_2$**.**
- **b) Tout d'abord,** φ **est une application linéaire de** $L^2(I)$ **dans** K**.**
  Si $\varphi(f) = 0$**, alors** $f = \varphi(f)' + c\varphi(f) = 0$**. Donc** φ **est injectif (c'est valable sur** $\mathcal{C}^0(I)$**).**
  Soit g **dans** K**. On pose** $f = g' + cg$**. Alors** f **est continue et appartient à** $L^2(I)$ **(par combinaison linéaire d'éléments de** $L^2(I)$**). De plus, comme** $g(0) = 0$**,** $g = \varphi(f)$**.**
  Donc φ **est surjective de** $L^2(I)$ **dans** K**.**
  Finalement, φ **est un isomorphisme de** $L^2(I)$ **dans** K**.**
- **c) L'inégalité de la question 2.a assure la continuité de l'application linéaire** φ **de** $(L^2(I), \|.\|_2)$ **dans** $(K, \|.\|_H)$**.**
- **d) Soit** g **dans** K**. D'après la question 2.b,** $\varphi^{-1}(g) = g' + cg$**.**
  Donc $\left\|\varphi^{-1}(g)\right\|_2 \leq \|g'\|_2 + c\|g\|_2 \leq \|g\|_H + c\|g\|_H = (1+c)\|g\|_H$**.**
  Cette inégalité assure la continuité de l'application linéaire φ^{-1} **de** $(K, \|.\|_H)$ **dans** $(L^2(I), \|.\|_2)$**.**

Fin
à la prochaine