CPGE My Youssef, Rabat

DL 3 Bis: *Evn Réduction*

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

19 octobre 2009

Source: Concours National Commun – Session 2001 – MP

Notations et rappels

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 3$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E. Si $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ se note uv et l'identité est notée I_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{m} a_k u^k$ où les u^p sont définis par les relations $u^0 = I_E$ et $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ u^p = uu^{p-1}$. On rappelle que si $P,\ Q \in \mathbb{K}[X]$, les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Si u est un endomorphisme de E, le polynôme minimal de u sera noté π_u et le polynôme caractéristique se notera χ_u ; on rappelle que π_u est le polynôme unitaire de degré minimal annulateur de u, c'est le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de u, et que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda\, I_E)\ .$$

Un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On rappelle que pour un tel endomorphisme, en dimension n, le polynôme caractéristique vaut $(-1)^n X^n$.

1ère Partie
Résultats préliminaires

A- Calcul de la dimension d'un sous-espace vectoriel de E

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de u et $p \in \mathbb{N}^*$ son ordre de multiplicité ; on sait qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\chi_u = (X-\lambda)^p Q \quad \text{et} \quad Q(\lambda) \neq 0.$$

On pose $F_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda I_E)^p$.

1. Montrer que $E = F_\lambda \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$ et que les sous-espaces vectoriels F_λ et $\operatorname{Ker} Q(u)$ sont stables par u .
2. On désigne par v (respectivement w) l'endomorphisme de F_λ (respectivement $\operatorname{Ker} Q(u)$) induit par u.
   (a) Que peut-on dire de l'endomorphisme $(v - \lambda I_{F_\lambda})$ de F_λ ?
   (b) Calculer χ_v en fonction de λ et $d = \dim(F_\lambda)$ puis montrer que
   $$\chi_u = (-1)^d (X-\lambda)^d \chi_w$$
   avec la convention $\chi_w = 1$ si $\operatorname{Ker} Q(u) = \{0_E\}$.
   (c) Montrer que $\chi_w(\lambda) \neq 0$ et conclure que $p = d$.

B- Un résultat sur le polynôme minimal

Soit u un endomorphisme de E.

1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal noté $\pi_{x,u} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$, puis justifier que $\pi_{x,u}$ divise π_u.

2. En déduire que l'ensemble $\{\pi_{x,u},\ x \in E \setminus \{0_E\}\}$ est fini.

3. On pose $\pi_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et les P_i irréductibles et deux à deux distincts. Montrer que pour tout i de $\{1, \dots, r\}$, il existe $y_i \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, puis construire un élément $x_i \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $P_i^{\alpha_i} = \pi_{x_i,u}$. (*Raisonner par l'absurde et utiliser 2.*)

4. Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$; on suppose que les polynômes $R = \pi_{x,u}$ et $S = \pi_{y,u}$ sont premiers entre eux. Justifier que $x + y \neq 0$, puis montrer que $\pi_{x+y,u} = RS$.

5. Déduire de ce qui précède qu'il existe $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\pi_{e,u} = \pi_u$.

2ème Partie
Étude de $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \deg(\pi_u) = n - 1\}$.

A- Le cas d'un endomorphisme nilpotent

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; on suppose que $v^{n-1} = 0$ et $v^{n-2} \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^{k+1}$$
et que
$$\operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^{k+1} \Longrightarrow \operatorname{Ker} v^{k+1} = \operatorname{Ker} v^{k+2}.$$

2. En déduire que
$$\{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker} v \subsetneq \operatorname{Ker} v^2 \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker} v^{n-2} \subsetneq \operatorname{Ker} v^{n-1} = E.$$

3. Montrer alors que pour tout $k \in \{1, \dots, n-2\}$,
$$k \leqslant \dim(\operatorname{Ker} v^k) \leqslant k + 1.$$

4. Supposons que pour $p \in \{1, \dots, n-2\}$ on ait : $\dim(\operatorname{Ker} v^p) = p$ et $\dim(\operatorname{Ker} v^{p+1}) = p + 2$; montrer que $\dim(\operatorname{Ker} v^p) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} v^{p-1}) + 2$ et trouver une contradiction.
(*On pourra utiliser $v(F)$ où F est un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} v^p$ *dans* $\operatorname{Ker} v^{p+1}$).

5. En déduire que pour tout $q \in \{1, \dots, n-2\}$, $\dim(\operatorname{Ker} v^q) = q + 1$.

6. Montrer que $\operatorname{Ker} v \not\subset \operatorname{Im} v$.
(*On pourra raisonner par l'absurde et considérer l'endomorphisme g induit par v sur* $\operatorname{Im} v$).

7. Soient $x_0 \in \operatorname{Ker} v \setminus \operatorname{Im} v$ et $y \in E \setminus \operatorname{Ker} v^{n-2}$.
   (a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $H = \operatorname{vect}(\{y, v(y), \dots, v^{n-2}(y)\})$.
   (b) Vérifier que H et $\mathbb{K}x_0$ sont supplémentaires dans E et que H est stable par v.
   (c) Vérifier que $(y, v(y), \dots, v^{n-2}(y), x_0)$ est une base de E et écrire la matrice J de v dans cette base.

B- Cas général

1. Soient $R = X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de R. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice M relativement à $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   (a) Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, exprimer $u^k(e_1)$ en fonction des éléments de la base $\mathcal{B}$.

   (b) Calculer $R(u)(e_1)$ puis $R(u)(e_k)$, pour tout $k \in \{2, \dots, n-1\}$, et enfin $R(u)(e_n)$; en déduire que R est un polynôme annulateur de u.

   (c) Montrer que le degré du polynôme minimal π_u de u est supérieur ou égal à $n-1$ et en déduire que R coïncide avec π_u puis que $u \in \mathcal{C}$. (*On pourra raisonner par l'absurde*).

   (d) Déterminer χ_u en fonction de R et α.

2. Soit $u \in \mathcal{C}$.

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_u = (-1)^n (X - \alpha)\pi_u$ et que $\pi_u(\alpha) = 0$.

   Dans la suite, k désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre α de u. On sait, puisque $\chi_u = (-1)^n (X - \alpha)\pi_u$, qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\pi_u = (X - \alpha)^{k-1} Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

   (b) Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \oplus \operatorname{Ker} Q(u);$$

   en déduire que

$$\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \subsetneq \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k.$$

   (c) On désigne par v l'endomorphisme de $\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k$ induit par $u - \alpha I_E$.

      i. Vérifier que $v^{k-1} = 0$ et $v^{k-2} \neq 0$.

      ii. En déduire qu'il existe un vecteur propre x_0 de u, associé à la valeur propre α, et un sous-espace vectoriel H_1 de $\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k$, stable par u, tels que

$$\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \mathbb{K}x_0 \oplus H_1.$$

   (d) Montrer que la somme $H = H_1 + \operatorname{Ker} Q(u)$ est directe et que le sous-espace vectoriel H est un supplémentaire de $\mathbb{K}x_0$ dans E, qui est stable par u.

   (e) On désigne par w l'endomorphisme induit par u sur H.

      i. Montrer que $\chi_u = (\alpha - X)\chi_w$, puis en déduire $\pi_w(\alpha)$.

      ii. Montrer que π_w est un polynôme annulateur de u, puis que $\deg(\pi_w) = n-1$.

(f) En utilisant la question B-5 des préliminaires, montrer que H possède une base du type $(e, w(e), \ldots, w^{n-2}(e))$, avec $e \in H$, et écrire la matrice de w dans cette base.

(g) Construire alors une base $\mathcal{B}_1$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme (1).

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. Montrer que $\deg(\pi_A) = n-1$ si et seulement s'il existe une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $a_0, \ldots, a_{n-2}$, α, éléments de $\mathbb{K}$, avec $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme (1).
Justifier que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut choisir P dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$.

3ème Partie

Dans cette partie, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|.\|$: $A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \Big(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$; $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ désigne $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer la connexité par arcs de l'ensemble

$$\boldsymbol{\mathcal{C}(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \deg(\pi_A) = n-1\}.}$$

1. (a) Montrer que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ A \mapsto \det A$ est continue et que $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ est un ouvert.
   (b) Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.
   (c) Soit $(A, H) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $A+H$ est une matrice inversible et exprimer $(A+H)^{-1} - A^{-1}$ comme la somme d'une série.
   (*On pourra écrire $A + H = A(I_n + A^{-1}H$.)*)
   (d) En déduire que l'application $\mathcal{I} :\ \mathrm{G}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ est continue.

2. (a) Soient A et B deux éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $T(x) = \det(xB + (1-x)A)$, $x \in \mathbb{C}$, est un polynôme en x, à coefficients complexes, et que T n'est pas le polynôme nul.
   (b) Soient $z_1, \ldots, z_p$ les racines de T et soit $r > 0$,
   soit $\phi :\ [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \phi(t) = \gamma(t)B + (1-\gamma(t))A$ avec $\gamma(t) = \begin{cases} t(1+2ir) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ t + 2ir(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$
      i. Montrer que ϕ est continue et calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$.
      ii. Montrer que l'on peut choisir r tel que ϕ soit à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et conclure.
      (*Si $I = \{i \in \{1, \ldots, p\}, \mathrm{Im}\, z_i > 0\}$ n'est pas vide, choisir $r < \min\{\mathrm{Im}\, z_i, i \in I\}$.)*

3. On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. J étant la matrice vue à la question A-7-c de la 2ème partie, montrer que l'ensemble $\{PJP^{-1}, P \in \mathrm{G}(\mathbb{K})\}$ est connexe par arcs.

4. Soit M une matrice de la forme (1) où $a_0, \ldots, a_{n-2}$ et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$. En remplaçant dans M les éléments $a_1, \ldots, a_{n-2}$ respectivement par $ta_1, \ldots, ta_{n-2}$, α par $t\alpha$ et a_0 par $\varepsilon(t) + a_0$, où $\varepsilon(t) = (t\alpha)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} ta_k(t\alpha)^k - a_0$, montrer que l'on obtient une matrice $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ et que l'application $\psi :\ [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto M(t)$ est continue ; calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

5. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

*Fin
à la prochaine*